

**7-9 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Робофест» по физике**

Теоретический обзор к занятию № 4.

Тема: «РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. РОЛЬ СИЛ ТРЕНИЯ.»

Если тела механической системы находятся в состоянии неравномерного движения, то нам необходимо анализировать изменения состояния движения, которые всегда связаны с **взаимодействием** тел. Таким образом, мы переходим к задачам **динамики**: нахождение закона движения тел по заданным силам (прямая задача) и нахождение сил по закону движения (обратная задача). Для движения материальной точки и поступательного движения твердого тела эти задачи решаются с использованием уравнений движения, следующих из второго закона Ньютона: в инерциальной системе отсчета ускорение тела определяется равнодействующей внешних сил, приложенных к этому телу: $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$. Проще всего решать такие уравнения при движении тела под действием постоянных сил – тогда из этого уравнения находится постоянное ускорение, что позволяет сразу записать закон движения.

Но иногда одних уравнений движений оказывается недостаточно. Это происходит, если движение одного или нескольких тел подчинено некоторым ограничениям – например, тела могут двигаться по направляющим, или могут быть соединены нитью. Такие ограничения называют *кинематическими связями*. Их математическая запись позволяет получить соотношения между координатами, скоростями и ускорениями тел – *уравнения кинематической связи*. Ясно, что обычно существует реальная физическая причина, приводящая к возникновению связи. Как правило, выполнение ограничений, накладываемых связями, обеспечивается действием *сил реакции* – сил натяжения нитей, сил нормальной реакции твердых тел и сил трения. Поэтому при решении задач, в которых возникают уравнения кинематической связи, важно обращать внимание на два обстоятельства. Во-первых, количество независимых уравнений связи должно быть равно количеству сил реакции, действующих в системе. Дело в том, что силы реакции не имеют заданных значений – они принимают как раз те значения, которые обеспечивают движения со связями. Поэтому они являются неизвестными величинами наряду с ускорениями тел вдоль координатных осей. Количество же независимых *уравнений движения*, следующих из второго закона Ньютона, очевидно равно числу этих ускорений. Поэтому для получения полной системы уравнений к уравнениям движения необходимо добавить по уравнению связи на каждую силу реакции. Во-вторых, для многих сил реакции существуют «пределы возможностей», при выходе за которые сила реакции уже не может обеспечить выполнение ограничений связи, и связь «разрушается» - нити провисают, тела начинают деформироваться или проскальзывать и так далее.

Перечислим наиболее часто встречающиеся в задачах виды связей с указанием пределов их существования.

Жесткий стержень:

Если тела соединены жестким стержнем, то расстояние между ними остается неизменным, а проекции скоростей и ускорений на направление стержня совпадают. Если рассматривается вращательное движение, то совпадают угловые скорости и угловые ускорения тел. Сила реакции, обеспечивающая связь – *сила упругости* стержня. Абсолютно жесткий стержень выдерживает любую внешнюю нагрузку, не деформируясь. Реальные стержни имеют предельные значения нагрузки, выше которых они начинают деформироваться. Если такой предел в задаче задан, то условие существования связи $|\vec{F}_{\text{уп}}| \leq F_{\text{max}}$.

Нерастяжимая нить:

В данном случае, пока нить натянута, она создает ограничения, во многом схожие с предыдущим случаем: расстояние между связанными телами остается неизменным, а проекции скоростей и ускорений на направление нити совпадают. Отличия же состоят в следующем: во-первых, нить может свободно изгибаться (вокруг блока, балки и т.д.), оставаясь натянутой; во-вторых, нить не может «сжиматься» - при уменьшении расстояния между телами она провисает. Сила реакции – *сила натяжения нити*, и условием

существования связи является выполнение требования $0 \leq T \leq T_{\max}$. При $T = 0$ нить провисает, а при $T = T_{\max}$ - рвется. Обычно рассматриваются только «идеальные» (то есть невесомые и нерастяжимые) нити, перекинутые через «идеальные» (недеформируемые гладкие) балки или «идеальные» (невесомые, вращающиеся без трения и круглые) блоки. В этих случаях сила натяжения нити одинакова во всех ее точках.

Соприкосновение жестких поверхностей тел:

В этом случае, пока деформациями поверхностей можно пренебрегать, и пока тела не отрываются друг от друга, их смещения в направлении, перпендикулярном поверхности соприкосновения, должны быть равны. Поэтому равны и проекции скоростей и ускорений тел на соответствующую ось. Обеспечивает выполнение уравнений связи *сила нормальной реакции*, которая должна удовлетворять требованию $0 \leq N \leq N_{\max}$. При $N = 0$ происходит отрыв тел друг от друга, а при $N = N_{\max}$ - поверхности начинают существенно деформироваться.

Отсутствие проскальзывания соприкасающихся тел:

Этот вид связи может возникать как дополнение к предыдущему, если между соприкасающимися телами существует *сила трения*, способная обеспечить отсутствие проскальзывания. Тогда тела вообще не изменяют своего относительного положения – их скорости и ускорения совпадают. Условие существования связи: $|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq F_{\text{тр}}^{\max} = \mu N$.

Отметим, что в «школьных» задачах обычно рассматриваются системы, в которых действует не более одной - двух связей, причем связанные тела совершают **прямолинейные движения**. В этом случае получение уравнения связи, дополняющего уравнения движения, возможно по следующей схеме: из геометрии системы мы должны найти связь **смещений** тел (например, если мы действуем с силой на одно из двух тел системы, и оно движется по прямой, увлекая за собой вдоль той же прямой второе, привязанное к первому нерастяжимой нитью, то смещения этих тел всегда равны, пока нить не провисает). Соотношения для смещений приводят к такому же соотношению для скоростей, а оно (при прямолинейном движении) – к такому же соотношению для ускорений. Ясно, что нам обычно нужна именно связь для ускорений, чтобы использовать ее вместе с уравнениями движения.

При решении задач динамики **криволинейного движения** действующие на тело силы удобно разложить на касательную и нормальную (по отношению к траектории) составляющие. При этом каждая из этих компонент сил создает соответствующую

компоненту ускорения (касательную и центростремительную): $\vec{a} = \vec{a}_{\text{кас}} + \vec{a}_{\text{цс}} = v'_t \cdot \vec{e}_{\text{кас}} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{e}_{\text{цс}}$

(здесь R - радиус кривизны траектории в заданной точке). В частности, если результирующая сила, действующая на тело в рассматриваемой задаче, перпендикулярна скорости, то у такого тела есть только центростремительная компонента ускорения, и модуль скорости тела не меняется (скорость изменяется только по направлению). Если и величина этой силы не будет меняться, то, как видно из формулы для центростремительного ускорения, будет оставаться неизменным и радиус кривизны траектории, то есть тело будет совершать равномерное вращение по окружности. Для анализа движения в подобных случаях обычно достаточно исходить из одного уравнения движения для центростремительной

компоненты ускорения: $m \frac{v^2}{R} = F_n$.

«Общая схема» решения задач динамики:

Шаг 0: Перечислить (лучше всего – изобразить на схематическом рисунке) **все** силы, действующие на каждое из тел рассматриваемой системы.

Шаг 1: Выбрать СО и СК, обеспечивающие наиболее простую запись уравнений движения. В частности, обычно выгодно направлять координатные оси по направлениям действия большинства сил или по направлению прямолинейных движений тел.

Шаг 2: Записать уравнения движения тел системы.

Шаг 3: Записать (если это необходимо, то есть если в системе присутствуют связи, анализ которых необходим для получения ответа) уравнения связей для ускорений тел.

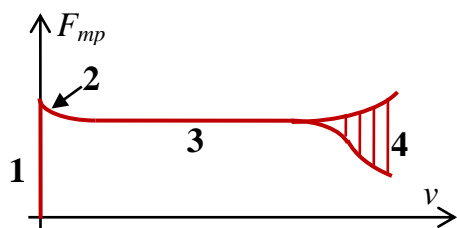
Шаг 4: Записать через те же величины заданную в условии дополнительную информацию (геометрические соотношения, соотношения сил, информацию о временных интервалах).

Шаг 5: Из записанных соотношений выразить искомую величину непосредственно либо (если вопрос предполагает исследование полученного движения) из законов движения тел, отвечающих найденным ускорениям.

В рамках нашего курса особое внимание уделяется **силам трения**. Основная особенность этих сил – их «многоликость». Конечно, они все имеют общую природу, так как обусловлены электромагнитным взаимодействием молекул на границах соприкасающихся тел. Все они являются *диссипативными* силами – отличная от нуля работа этих сил всегда отрицательна и уменьшает механическую энергию системы, переводя ее в тепло (то есть в энергию молекулярного движения). Однако проявления действия этих сил очень многообразны, и поэтому способы теоретического описания этих сил в разных ситуациях также отличаются довольно сильно.

Для успешного решения задач, посвященных движению с учетом трения, очень важно иметь правильное качественное понимание физики протекающих процессов. Поэтому необходимо очень подробно разобрать теорию по этому вопросу. В этом обзоре она описывается в объеме, несколько превышающем «необходимый минимум» для решения задач, как раз для создания хорошего понимания.

Силы *сухого трения* возникают при соприкосновении твердых тел, если существуют внешние причины, вызывающие относительное движение (*скольжение*) этих тел. Таким образом, силы сухого трения можно отнести к силам реакции, ибо они возникают «в ответ» на действие этих «внешних причин» и принимают в точности те значения, которые нужны для предотвращения проскальзывания. Если силы трения способны поддерживать равновесие тел, то их называют силами *трения покоя*. В этом случае скольжение тел друг по другу отсутствует, и тела движутся вместе, то есть их движение подчинено *условию связи*. Задачи о подобных ситуациях рассматриваются в соответствующем занятии. Однако силы трения покоя не могут увеличиваться до бесконечности – всегда существует их предельное (максимальное) значение, и если внешние силы, сдвигающие тела, превысят это значение, то начинается проскальзывание тел. Теперь силу сухого трения уже называют силой *трения скольжения*, так как закономерности ее поведения изменяются. Рассмотрим некий «характерный» график зависимости силы сухого трения от относительной скорости соприкасающихся тел.



- Участок **1**, отвечающий нулевой скорости, описывает силы **трения покоя**, которые могут принимать любые нужные для уравнивания внешних сил значения от нуля до максимального значения F_{\max} .
- Участок **2** описывает «*эффект застоя*». Для того, чтобы сдвинуть тела, требуется большая сила, чем для поддержания их относительного движения. Поэтому сразу после начала движения при постоянной внешней силе тела быстро «разгоняются» (их ускорение растет). Возникающий участок «отрицательного» наклона кривой $F_{\text{тр}}(v)$ играет важную роль во многих физических явлениях – например, в передаче энергии от смычка к струне в некоторых музыкальных инструментах.
- Участок **3** отвечает **трению скольжения** – величина силы трения практически не зависит от скорости и пропорциональна силе нормальной реакции, возникающей при прижатии тел друг к другу: $F_{\text{тр}}(v) \approx \text{const} \approx \mu N$. Коэффициент пропорциональности μ называют коэффициентом трения. Эксперимент показывает, что этот коэффициент

не изменяется при изменении площади соприкосновения тел, если при этом не меняется характер взаимодействия поверхностей.

- Участок 4 отвечает фазе «видоизменения» соприкасающихся поверхностей. В самом деле, при значительных скоростях поверхности могут плавиться (например, при движении конька по льду последний начинает плавиться даже при не очень больших значениях скорости, обеспечивая «легкость» скольжения), могут частично разрушаться. Все это может приводить к очень значительным изменениям силы трения – как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения. В дальнейшем – при «сверхбольших» значениях относительной скорости плавятся почти любые тела, да и физика взаимодействия поверхностей тел настолько меняется, что возникающие явления уже нельзя относить к «сухому трению».

Однако в задачах, построенных на основе школьного курса физики, большинство из описанных явлений не рассматривается. Даже в олимпиадных задачах используется существенно упрощенная картина. Обычно пренебрегают эффектом застоя, и считают, что максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения: $F_{\max} \approx \mu N$, и не рассматривают явления, связанные с изменением свойств поверхностей. Таким образом, зависимость силы сухого трения от скорости сводится к упрощенной:

$$F_{\text{тр}}(v) \approx \begin{cases} F_{\parallel}^{(\text{внеш})}, & |F_{\parallel}^{(\text{внеш})}| \leq \mu N, v = 0 \\ \mu N, & v \neq 0 \end{cases}$$

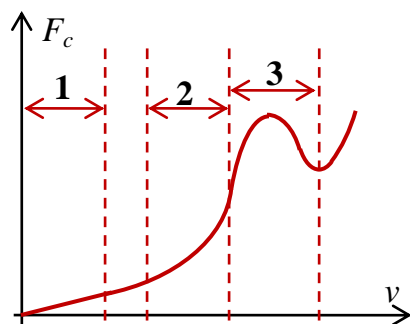
(здесь $F_{\parallel}^{(\text{внеш})}$ - параллельная поверхности соприкосновения составляющая внешних сил).

Таким образом, силу сухого трения считают постоянной в процессе движения тела. Поэтому методы решения обычны для школьных задач для движения под действием постоянных сил: ускорения тел находятся из уравнений движения, а затем по ускорениям находятся скорости и координаты. При наличии других сил, которые не остаются неизменными, полезно использовать закон изменения механической энергии. Особенности задач с силой сухого трения состоят в следующем: во-первых, надо помнить о переходе силы трения скольжения в силу трения покоя сразу после остановки, во-вторых – надо учитывать, что при неизменной величине направление силы трения скольжения меняется вместе с изменением направления движения (сила трения **всегда** направлена **против скорости тела относительно поверхности**).

При движении тела в жидкости или газе возникают силы, препятствующие этому движению – *силы сопротивления*. Аналогичным образом силы, действующие на тело со стороны среды, возникают при обтекании жидкостью или газом покоящегося тела. Ясно, что при описании взаимодействия тела со средой важна величина скорости относительно среды, поэтому эти две ситуации фактически не отличаются друг от друга. Поэтому будем рассматривать их одновременно. В однородной жидкой или газообразной среде силы сопротивления возникают только при движении тела относительно среды, то есть $F_{\text{сопр}}(0) = 0$, и сила сопротивления всегда направлена против скорости тела относительно среды. Для небольших тел при низких скоростях основная причина торможения движения тела в среде – *жидкое*, или *вязкое*, *трение*, возникающее благодаря взаимодействию поверхностных молекул тела с молекулами ближнего к телу слоя жидкости. В такой ситуации течение жидкости вблизи тела является *ламинарным (безвихревым)*, а величина силы вязкого трения пропорциональна скорости: $F_{\text{тр}}(v) = \alpha v$. Коэффициент α зависит от свойств среды, размеров и формы тела: $\alpha = f \eta p$. Здесь p - максимальный периметр сечения тела, перпендикулярного скорости, η - характеристика «вязких» свойств среды (которую так и называют: *вязкость*), а f - коэффициент, зависящий от формы тела. Обычно (если форма тела не слишком сложная) он по порядку величины близок к единице: для выпуклых гладких тел $1 < f < 6$, для шара $f = 3$. При увеличении скорости и размеров тела, при усложнении его формы (например, при появлении острых «краев») ламинарность обтекания тела средой нарушается: позади тела возникают *турбулентные завихрения* – быстрые вихревые движения среды. При этом наряду с вязким трением возникает эффект лобового сопротивления: на переднюю поверхность тела натекает упорядоченный поток жидкости или газа, в то время

как вблизи задней поверхности движения частиц среды неупорядоченные. Поэтому возникает разность давлений (так называемый «динамический напор») и сила лобового сопротивления, величина которой пропорциональна квадрату скорости: $F_{\text{comp}}(v) = \beta v^2$. Здесь β зависит от плотности среды ρ и площади поперечного сечения тела S : $\beta = \tilde{f} \frac{\rho}{2} S$. Коэффициент \tilde{f} - величина порядка единицы для тел не слишком сложной формы (типичные значения для выпуклых тел $0.1 \leq \tilde{f} \leq 1.5$, для шара $\tilde{f} = 0.4$). Сопоставление формул (с учетом того, что $S/\rho \approx L$ - характерный поперечный размер тела) подсказывает, что поведение силы сопротивления в заданной среде действительно определяется скоростью и размерами тела: при $L \cdot v \leq 10 \eta / \rho$ доминирующим механизмом является вязкое трение (в этом случае можно считать, что сила сопротивления линейна по скорости), а при $L \cdot v \gg 100 \eta / \rho$ доминирует лобовое сопротивление (квадратично). Например, для воздуха при нормальных условиях $\eta / \rho \approx 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$, для воды $\eta / \rho \approx 1.15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$, для глицерина $\eta / \rho \approx 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 / \text{с}$. В олимпиадных задачах обычно используется одна из зависимостей. При этом обычно в условии задаются не параметры среды, а непосредственно указывается, какой из зависимостей следует пользоваться. Полезно, однако, понимать общую тенденцию: для «маленьких и медленных» тел сила сопротивления среды линейно зависит от скорости, для «больших и быстрых» - квадратично. Отметим, что в реальности существует и «промежуточный» диапазон $L \cdot v \approx 100 \eta / \rho$, когда сила сопротивления описывается некой «комбинированной» формулой.

Проведенный анализ корректен в предположении, что рассматриваемые значения скоростей тел малы по сравнению со скоростью звука в среде. Звук – распространение изменений давления и плотности в среде, поэтому перед телом, движущимся со скоростью, близкой к скорости звука, формируется «неубегающее» уплотнение, и сила сопротивления резко возрастает (так называемый «звуковой барьер»). Строго говоря, движение точно со скоростью звука динамически неустойчиво: оно требует постоянного увеличения мощности двигателя, и к тому же при любом изменении скорости (в том числе при ее увеличении!) сила сопротивления довольно резко убывает. Подытоживая сказанное, изобразим «типичную» зависимость силы сопротивления от скорости тела относительно среды.



- 1 – «зона вязкого трения»
- 2 – «зона лобового сопротивления»
- 3 – «зона звукового барьера»