10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к вводному занятию 8.

Тема: «Конденсаторы и накопление энергии».

Конденсаторы – устройства для накопления *электрического заряда* при подключении к источнику напряжения. Конденсатор состоит из двух проводящих тел (обкладок), разделенных изолирующим промежутком. У «симметричных» конденсаторов обкладки одинаковые и расположены симметрично. У «плоских» конденсаторов обкладки – одинаковые плоские пластины, расположенные параллельно на малом расстоянии. Обычно конденсаторы заряжают симметрично – перенося заряд с одной обкладки на другую (то есть на одной обкладке оказывается заряд + q, а на другой – q). Тогда q называют зарядом конденсатора. Заряд обычно прямо пропорционален приложенному напряжению. Основная характеристика конденсатора – *электроемкость* (или просто *емкость*) – это отношение заряда конденсатора к величине напряжения между обкладками при этом заряде: $C \equiv \dfrac{q}{U}$. Единица измерения емкости – фарада ($1\Phi = \dfrac{1\text{Кл}}{1\text{В}}$).

Например, у плоского конденсатора, обкладками которого являются две пластины площадью S, разделенные слоем диэлектрика с проницаемостью ε толщиной d, емкость равна $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, где электрическая постоянная $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Пример 1. Плоский конденсатор с $S = 403\text{см}^2$, $d = 1$мм, между пластинами которого находится диэлектрическая пластина с $\varepsilon = 28$ заряжен до напряжения $U = 200$В. Чему равен заряд конденсатора? Каким станет напряжение между его обкладками, если, предварительно разъединив его обкладки и отключив конденсатор от каких-либо источников напряжения, вытащить из конденсатора диэлектрическую пластину?

Подсчитаем емкость конденсатора: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \approx 10^{-8}$ Ф, или 10 нФ. Заряд конденсатора $q = CU \approx 2$ мкКл. После вытаскивания пластины заряды обкладок не изменились, так как они были разъединены и отключены от источников. Емкость при этом уменьшилась в 28 раз. Значит, напряжение во столько же раз увеличилось и стало равно 5600 В.

Отметим, что емкость определяется именно по напряжению при «антисимметричной» зарядке: при других способах зарядки напряжение между обкладками не равно ! Если, например, на обе обкладки симметричного конденсатора поместить <u>одинаковый</u> (по знаку и по величине) заряд, то напряжение между обкладками будет, конечно же, равно нулю. Вместе с зарядом конденсатор накапливает энергию в форме электростатического поля между обкладками. Энергия, запасенная конденсатором при стандартной («антисимметричной») зарядке, определяется по формуле $E_C = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{CU^2}{2}$.

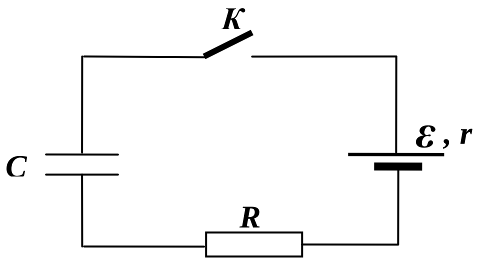
Пример 2. Энергия электрического поля в симметричном конденсаторе с емкостью 5 мкФ равна 0,4 Дж. Чему равно напряжение между его обкладками? Известно, что суммарный заряд обкладок равен нулю.

Так как $E_C = \dfrac{CU^2}{2}$, то $U = \sqrt{\dfrac{2E_C}{C}} = 400$В.

Пример 3. Чему станет равно напряжение между пластинами конденсатора из примера 2, если полностью разрядить одну из его обкладок?

Заряды обкладок конденсатора $q_{1,2} = \pm CU \approx \pm 2$мКл. Если разрядить одну из его обкладок (допустим, отрицательно заряженную), то у нас будет конденсатор с зарядами +2мКл и 0 на обкладках. Поле от таких зарядов в соответствии с принципом суперпозиции можно рассмотреть как наложение полей, созданных двумя системами зарядов, помещенных на пластинах: (1) $Q'_1 = +1$ мКл, $Q'_2 = +1$ мКл и (2) $Q''_1 = +1$ мКл, $Q''_2 = -1$ мКл. Системе (1) отвечает напряжение U', равное нулю, а системе (2) – напряжение U'', равное $\dfrac{Q''_2}{C} = 200$В.

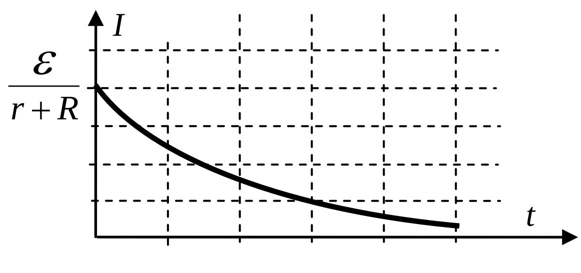
При подключении источника *электродвижущей силы* (ЭДС) к участку цепи, содержащему резисторы и конденсаторы, в этих участках появляется ток, обеспечивающий зарядку или перезарядку конденсаторов. В ходе перезарядки напряжение на конденсаторах изменяется, и поэтому токи в такой цепи будут изменяться с течением времени. Рассмотрим в качестве примера зарядку одного конденсатора от батареи с постоянной ЭДС. Пусть перед замыканием ключа конденсатор разряжен (его заряд равен нулю).

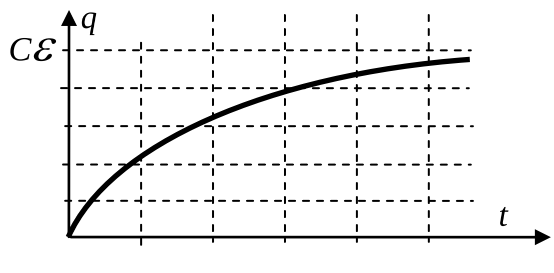


После замыкания ключа в этой схеме потечет ток – начнется процесс зарядки. Напряжение на конденсаторе пропорционально его заряду $U_C = q/C$, а скорость изменения заряда есть сила тока зарядки: $q'_t = I$. Ее величина определяется из закона Ома для участка цепи с ЭДС

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_C}{r+R} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{r+R} - \frac{1}{C(r+R)}q$$

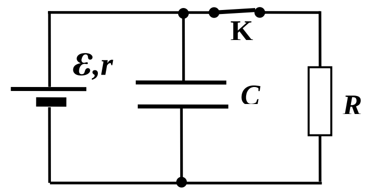
Как видно, в начале зарядки сила тока в цепи равна $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{r+R}$, а то мере увеличения заряда она уменьшается, и обращается в ноль к окончанию зарядки, когда заряд конденсатора становится равным $q = C\mathcal{E}$. Соответственно можно представить себе графики законов изменения силы тока и заряда:





На самом деле, точное решение для этих величин описывается формулами, для вывода которых нужны навыки *интегрирования*. Приведем только вид этих формул: $B = -C\mathcal{E}$, $q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$ и $B = -C\mathcal{E}$, $q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$. Величину $\tau = C(r+R)$ называют *постоянной времени зарядки*. Как видно, она имеет размерность времени и зависит от емкости конденсатора и полного сопротивления контура зарядки. Формально зарядка длится бесконечно долго, но на самом деле при очень больших временах $t >> \tau$ заряд конденсатора практически перестает изменяться, достигнув «конечного» значения $q = C\mathcal{E}$.

Пример 4. Каким станет заряд конденсатора в схеме, показанной на рисунке, спустя достаточно большое время после замыкания ключа?



После установления стационарного режима по внешнему контуру схемы течет постоянный ток с $I=\dfrac{\mathcal{E}}{r+R}$. Поскольку конденсатор подключен параллельно резистору, то напряжение на нем равно $U=IR=\dfrac{R}{r+R}\mathcal{E}$. Значит, $q=CU=\dfrac{CR}{r+R}\mathcal{E}$.

Пример 5. Конденсатор емкостью $C=100$мкФ заряжается через сопротивление $R=100$кОм от источника с ЭДС $\mathcal{E}=100$В и внутренним сопротивлением около 1 Ом. Чему примерно будет равен заряд конденсатора спустя время $t=1c$ после начала зарядки? Для ответа на этот вопрос нужно заметить, что постоянная времени зарядки $\tau=10$с, то есть заданный момент времени соответствует начальной стадии зарядки, когда ток почти не изменился по сравнению с начальным, равным $I_0=\dfrac{\mathcal{E}}{r+R}\approx 1$мА. Значит, $q(t)\approx I_0 t\approx 1$мКл.

При протекании тока выделяется джоулево тепло. Хотя мощность тепловых потерь изменяется с течением времени, подсчитать полное количество «потерянной» энергии довольно просто. В самом деле, как следует из определения ЭДС, сторонние силы источника совершили работу $A=\mathcal{E}q=C\mathcal{E}^2$, и при этом конденсатор получил энергию $E_C=\dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$. Следовательно, потери энергии составляют тоже $\dfrac{C\mathcal{E}^2}{2}$. Для «обычных» цепей основным способом потерь энергии является как раз выделение тепла. Это не так только для цепей с очень малым временем зарядки τ и очень большой длиной L, так что L/τ приближается по порядку величины к скорости света (другим каналом потерь энергии в этом случае является излучение цепью *электромагнитных волн*)! Обычно в школьных и олимпиадных задачах такие цепи возникают только в том случае, если все сопротивления в цепи крайне малы. В случае наличия заметного сопротивления можно считать, что практически вся потерянная энергия выделилась в виде тепла. Подчеркнем: это тепло, выделившееся <u>во всех</u> элементах схемы. В нашем примере, если сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, это тепло распределяется между сопротивлением резистора и внутренним сопротивлением батареи. Так как они включены в цепь зарядки последовательно, то доля общего тепла для каждого элемента пропорциональна его сопротивлению. Поэтому

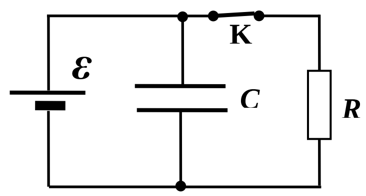
$$Q_r=\frac{r}{r+R}\frac{C\mathcal{E}^2}{2},\quad Q_R=\frac{R}{r+R}\frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Отметим некоторые важные обстоятельства. Ни конечный заряд конденсатора, ни полные потери энергии <u>не зависят</u> от величин сопротивления элементов. Это естественно, так как эти сопротивления не входят ни в условие прекращения зарядки (когда поле зарядов на обкладках конденсатора «уравновешивает» действие сторонних сил источника: $\dfrac{q}{C}=\mathcal{E}$), ни в выражения для работы источника и энергии конденсатора. Как мы обнаружили, от величины сопротивления зависит <u>скорость</u> зарядки (о которой можно судить по величине времени установления равновесия $\tau\equiv C(r+R)$) и <u>распределение</u> выделившегося тепла между элементами цепи. Заметим также, что конденсатор получает ровно половину энергии, потраченной источником в процессе зарядки (как иногда говорят, КПД зарядки конденсатора составляет 50 %). Такое простое соотношение между этими величинами встречается довольно часто, однако к его применению без вывода в решении задач надо подходить осторожно. Оно справедливо в том случае, если цепь зарядки содержит только линейные элементы, конденсаторы изначально не были заряжены и в конечном состоянии токи стали практически равны нулю. В других случаях это соотношение может нарушаться. Чтобы в этом убедиться, достаточно в рассмотренном примере зарядить конденсатор изначально (до подключения к батарее). Пусть этот начальный заряд $0 < q_0 < C\mathcal{E}$. Тогда в процессе «дозарядки» конденсатора источник переместит заряд $\Delta q = C\mathcal{E} - q_0$ и совершит работу $A = (C\mathcal{E} - q_0)\mathcal{E}$. Увеличение энергии конденсатора $\Delta E_C = (C^2\mathcal{E}^2 - q_0^2)/2C$, следовательно

$$\frac{\Delta E_C}{A} = \frac{C\mathcal{E} + q_0}{2C\mathcal{E}} = \frac{1}{2} + \frac{q_0}{2C\mathcal{E}} > \frac{1}{2}.$$

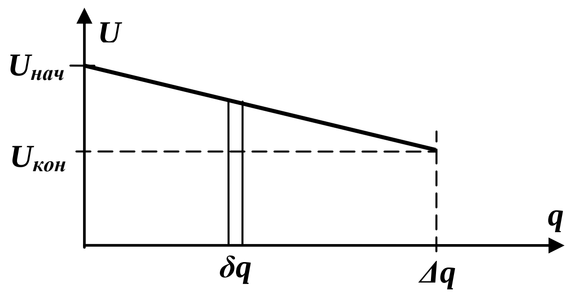
Пример 6.

Конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ присоединен к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 20$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. В начальный момент времени ключ К был замкнут (см. рисунок). Какую работу совершит источник после размыкания ключа, если сопротивление резистора $R = 19$ Ом?



До размыкания ключа по цепи, состоящей из источника и резистора, течет ток. Напряжение источника поделится между $r = 1$ Ом и $R = 19$ Ом пропорционально сопротивлениям. Поэтому напряжение на конденсаторе будет равно $U_C = \dfrac{R}{R + r}\mathcal{E} = 19$ В. После размыкания ключа источник дозарядит конденсатор до напряжения, равного ЭДС, переместив на него дополнительный заряд $q = C(\mathcal{E} - U_C) = 10$мкКл. Работа источника $A = \mathcal{E}q = 200$мкДж.

В заключение обсудим один удобный во многих случаях «легкий» способ вычисления тепла, выделяющегося на каком-либо элементе схемы. Если ток, протекающий через данный элемент, есть ток зарядки (или перезарядки) конденсаторов, то очень часто (условия проанализируем несколько позднее) напряжение на элементе будет линейно связано с величиной протекшего заряда.



Ясно, что работа электростатических сил по перемещению бесконечно малого заряда δqчерез данный элемент в тот момент времени, когда напряжение на нем было равно U, вычисляется как $U\delta q$. Эта работа как раз и компенсирует джоулевы потери в элементе. Поэтому полное выделившееся тепло численно равно площади под кривой $U(q)$, то есть площади трапеции

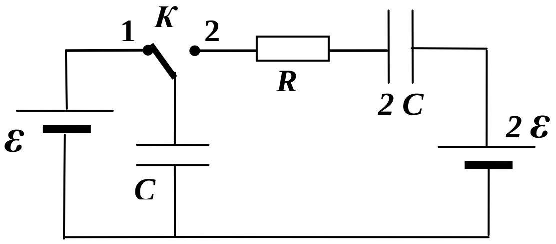
$$Q = \frac{U_{нач} + U_{кон}}{2}\Delta q.$$

Особенно удобен этот способ для цепей, в которых сопротивления всех элементов, кроме одного, пренебрежимо мало. В этом случае можно считать, что практически все тепло выделяется именно в этом элементе, и именно на этом элементе происходит основное падение напряжения в начальный момент времени. Например, если в приведенном выше примере пренебречь внутренним сопротивлением источника, то почти все тепло будет выделяться в резисторе. При этом начальное напряжение на сопротивлении примерно равно $\mathcal{E}$, конечное – нулю, а протекший заряд есть конечный заряд конденсатора, и тогда

$$Q_R \approx \frac{\mathcal{E}+0}{2}C\mathcal{E} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

В этом методе главное – правильно описать распределение зарядов и напряжений в схемах <u>в начале</u> и <u>в конце</u> нестационарных процессов.

Пример 7. В схеме, изображенной на рисунке, ключ К в течение длительного времени находился в положении 1, а конденсатор с емкостью $2C$ имел нулевой заряд. Какое количество тепла выделится в сопротивлении R после перевода ключа в положение 2?



Ясно, что за «длительное время» конденсатор C полностью зарядится от батареи $\mathcal{E}$ и его заряд будет равен $q = C\mathcal{E}$. После перевода ключа в положение 2 батарея $2\mathcal{E}$ начнет заряжать конденсатор $2C$. При этом, когда заряд, перемещенный батареей, попадает на положительно заряжаемую обкладку этого конденсатора, то в точности такой же заряд поступает на положительно заряженную обкладку конденсатора C. Таким образом, зарядка конденсатора $2C$ происходит синхронно с увеличением заряда конденсатора C. Процесс перезарядки батареи конденсаторов заканчивается, когда сумма напряжений на них сравнивается с ЭДС. Как через источник, так и через сопротивление R протечет заряд Δq, определяемый из соотношения

$$\frac{C\mathcal{E}+\Delta q}{C} + \frac{\Delta q}{2C} = 2\mathcal{E} \Rightarrow \Delta q = \frac{2}{3}C\mathcal{E}.$$

Сразу после переключения (то есть до того, как заряды переместились, и поэтому конденсатор $2C$ был еще незаряжен) напряжение на резисторе равнялось

$$U_0 = 2\mathcal{E} - \mathcal{E} = \mathcal{E}.$$

Так как по мере протекания заряда напряжение на резисторе уменьшается линейно до нуля, то

$$Q_R = \frac{1}{2}(U_0+0)\Delta q = \frac{C\mathcal{E}^2}{3}.$$

Ответ: на резисторе выделится тепло $Q_R = \dfrac{C\mathcal{E}}{3}$.