10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к вводному занятию 4.

Тема: «Закон сохранения механической энергии».

Одна из самых важных для понимания законов протекания разнообразных физических процессов величина – это *энергия*. Энергия характеризует способность разных видов материи к движению и взаимодействию, причем запас энергии нашего мира и его отдельных частей, взаимодействием которых с другими частями можно пренебречь, остается неизменным. Одним из видов энергии является *механическая энергия* – сумма энергии движения и энергий взаимодействий отдельных тел. Движущееся со скоростью $\vec{v}$ тело массой m обладает *кинетической энергией* $E_K = \frac{m\vec{v}^2}{2}$. Эта энергия изменяется за счет работы сил, действующих на тело. Силы могут быть разделены на *потенциальные* (или *консервативные*) и *непотенциальные* (обычно *диссипативные*) в зависимости от того, как они меняют кинетическую энергию тела – «возвратным» или «безвозвратным» образом. Например, при движении тела вверх в поле тяжести оно теряет кинетическую энергию за счет работы силы тяжести вплоть до полной остановки, но затем оно движется вниз, и при этом его кинетическая энергия уже возрастает – вновь за счет работы силы тяжести, т. е. сила тяжести «возвращает» отнятую энергию. Поэтому сила тяжести – потенциальная (консервативная). Можно рассматривать этот процесс как переход механической энергии из одной формы в другую – из кинетической в *потенциальную* и обратно. Напротив, сила трения, забрав у тела его кинетическую энергию, не будет разгонять его после остановки – здесь энергия тела переходит в <u>немеханическую</u> форму (в тепло). Отметим, что «возвратность» забираемой силой энергии можно установить по следующему признаку (*признак потенциальности*): если перемещать тело по <u>любой</u> замкнутой траектории, то работа потенциальной силы должна равняться нулю. Следствием этого свойства является то, что работа потенциальной силы при переносе тела из точки 1 в точку 2 не зависит от пути переноса и ее можно представить как разность значений некоторой функции координат – потенциальной энергии: $A_{12} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$. Таким образом, потенциальную энергию можно определить как величину, равную работе по перемещению тела из точки с данными координатами в некоторую «нулевую» точку ($U(\vec{r}_0) \equiv 0$). Видно, что потенциальная энергия определена с точностью до постоянного слагаемого (есть произвол в выборе «нулевой» точки).

В результате, если ввести понятие ***полной механической энергии*** как суммы кинетической и потенциальной энергий всех входящих в рассматриваемую систему тел, то можно сформулировать закон сохранения::

Если в механической системе сумма работы внешних сил и работы диссипативных сил равна нулю, то полная механическая энергия сохраняется в процессе движения: $(E_K + U)_{t=t_1} = (E_к + U)_{t=t_2}$.

Например, полная механическая энергия сохраняется в замкнутой системе (внешние силы отсутствуют) без диссипативных сил. Сила и потенциальная энергия связаны между собой: например, для малого перемещения тела вдоль одной координатной оси $F_x \cdot \Delta x = U(x) - U(x+\Delta x) \Rightarrow F_x = -\left.\frac{\Delta U}{\Delta x}\right|_{\Delta x \to 0}$ (те, кто знаком с дифференцированием, должны заметить, что сила равна производной от потенциальной энергии со знаком минус: $F_x = -U'_x$!).

Приведем наиболее часто используемые в задачах по материалам школьного курса физики выражения для потенциальной энергии:

- потенциальная энергия тела на высоте h в однородном поле тяжести $\vec{g}$ (энергия взаимодействия с «большим» массивным близко расположенным телом): $U = mgh$.

- потенциальная энергия деформированной пружины с жесткостью k связана с величиной деформации x: $U = \frac{k\,x^2}{2}$.

- потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел на расстоянии r_{12}: $U = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r_{12}}$.

- потенциальная энергия электростатического взаимодействия заряженных тел на расстоянии r_{12}: $U = k\,\frac{q_1\,q_2}{r_{12}}$, $\quad k \equiv \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$.

Из уравнения закона сохранения полной механической энергии можно находить связь скорости тела и его положения (то есть координат).

Пример 1: Небольшой тяжелый шарик просили с балкона под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 7{,}5$ м/с. Точка броска находилась на высоте $h = 5$ м над поверхностью Земли. Пренебрегая сопротивлением воздуха найдите, с какой скоростью шарик упал на Землю. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с^2.

Решение: На шарик действует только потенциальная сила – сила тяжести Земли. Поэтому можно использовать закон сохранения полной механической энергии: в момент броска механическая энергия равна $\frac{mv_0^2}{2} + mgh$, а в момент падения $\frac{mv^2}{2} + 0$. Поэтому $\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gh$, и $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 12{,}5$ м/с.

Пример 2: Маленький груз массой $m = 0{,}5$ кг прикрепили к свободно висящей вертикально легкой пружине с жесткостью $k = 100$ Н/м. Пружину сжали (сохраняя ее вертикальность) на расстояние $x_0 = 2$ см, и отпустили без начальной скорости. Какое расстояние пройдет груз до первой остановки? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с^2.

Решение: Так как и в начальной точке, и в точке остановки кинетическая энергия груза равна нулю, то из закона сохранения полной механической энергии следует, что равны друг другу потенциальные энергии системы в этих точках. Потенциальная энергия вкладывается из энергии груза в поле тяжести Земли и энергии деформированной пружины. Выберем за «нулевую» точку для энергии груза в поле тяжести Земли точку остановки (то есть будем отсчитывать высоту в формуле $U = mgh$ от этой точки). Пусть s – искомое расстояние. Тогда начальная точка находится на высоте s, а пружина в точке остановки растянута на величину $s - x_0$. Запишем закон сохранения энергии: $mgs + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{k(s-x_0)^2}{2}$. Из него получаем уравнение для определения s: $\frac{ks}{2}\left[s - 2\left(x_0 + \frac{mg}{k}\right)\right] = 0 \Rightarrow s = 2\left(x_0 + \frac{mg}{k}\right) = 14$ см.

Кроме того, закон сохранения энергии можно использовать для изучения изменения скорости движения тела по *криволинейной* траектории.

Пример 3: Для движения тела массы m по круговой орбите радиуса R в поле тяготения планеты или звезды с массой M получите соотношения, связывающие полную энергию тела с радиусом орбиты или скоростью v.

Решение: Заметим, что на круговой орбите центростремительное ускорение тела создается именно силой тяготения: $m\frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}$. С помощью этого выражения найдем, что полная энергия тела $E = E_K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{2R} = -\frac{mv^2}{2}$.

Эти соотношения позволяют просто оценить минимальную работу, которую надо совершить для перевода тела с одной круговой орбиты на другую. Кроме того, из них очевидно, что при уменьшении механической энергии тела (например, при действии слабых диссипативных сил) радиус орбиты тела должен уменьшаться, а величина скорости – увеличиваться! Таким образом, под действием «тормозящей» силы сопротивления воздуха спутники, вращающиеся вокруг Земли, разгоняются (переходя при этом на более низкую орбиту). Это явление называют «парадоксом спутника».

В более сложных случаях, когда существует отличная от нуля *касательная* составляющая результирующей силы, действующей на тело (в этом случае при движении по криволинейной траектории скорость тела будет изменяться не только по направлению, но и по величине), наиболее удобный путь анализа движения – это совместное использование уравнения движения для центростремительной компоненты ускорения и закона сохранения (изменения) полной механической энергии. Удобство это связано с тем, что в оба этих соотношения входит величина v^2, и возникающую систему можно решать алгебраически, как это было сделано в примере 3.

Пример 4: Гантель из невесомого стержня длины L и двух одинаковых маленьких массивных шариков установлена вертикально на краю горизонтальной крышки стола. Ее отпускают практически без начальной скорости, но так, чтобы она падала «наружу» от стола. Найти угловую скорость вращения гантели в момент отрыва от стола.

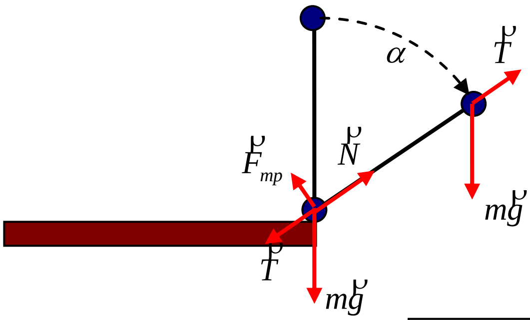

рисунок **1**

Решение:

Запишем закон сохранения механической энергии, пренебрегая движением нижнего маленького шарика:

$$\frac{mv^2}{2} + mgL\cos\alpha = mgL \Rightarrow v^2 = 2gL(1-\cos\alpha)$$

(здесь α - угол отклонения стержня гантели от вертикали). Добавляем к нему уравнение для центростремительной компоненты ускорения верхнего шарика (он движется по окружности радиуса L) и находим «радиальную» проекцию силы упругости стержня:

$$\frac{mv^2}{L} = mg\cos\alpha - T \Rightarrow T = mg(3\cos\alpha - 2)$$

(видно, что поначалу стержень сжат весом верхнего шарика, и T действительно направлено по радиусу, как показано на рисунке, но затем, по мере разгона шарика и наклона стержня, знак этой силы меняется – шарик начинает растягивать стержень). Теперь мы можем проанализировать условие отрыва нижнего шарика от стола. Запишем условие равновесия действующих на него сил в проекции на ось, идущую вдоль стержня:

$$N = mg\cos\alpha + T = 2mg(2\cos\alpha - 1)$$

Здесь важно обратить внимание на правильное использование условия: гантель ставится «на краю стола». Если бы гантель располагалась «на столе», то сила нормальной реакции стола N при любом наклоне стержня была бы направлена вертикально вверх, а в нашей ситуации эта сила направлена перпендикулярно плоскости соприкосновения нижнего шарика и края стола, то есть вдоль стержня! Теперь ясно, что отрыв происходит при обращении N в ноль, то есть при $\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$! Значит, скорость верхнего шарика в момент отрыва $v = \sqrt{gL}$, а угловая скорость вращения гантели $\omega = \frac{v}{L} = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Заметим, что в отсутствие сопротивления воздуха эта угловая скорость будет оставаться постоянной в процессе полета гантели (момент сил тяжести относительно ЦМ гантели в однородном поле равен нулю) до ее столкновения с каким-либо препятствием.

Одно из интересных следствий закона сохранения энергии – ***уравнение Бернулли***, описывающее движение жидкости. В этом случае в энергию системы надо включить энергию объемных напряжений в жидкости, плотность которых определяет давление жидкости p. Поэтому для всех малых объемов в одной «трубке тока» в идеальной жидкости плотностью ρ, движущейся в поле тяжести, выполняется требование $p+\frac{\rho v^2}{2}+\rho gh=const$. Часто это уравнение при использовании совместно с условием неизменности объема жидкости или следующим из него ***уравнением непрерывности потока*** жидкости $v\cdot S=const$ (произведение скорости потока жидкости в некотором сечении на величину поперечного сечения потока неизменно) позволяет найти многие характеристики потока.

Пример 5:

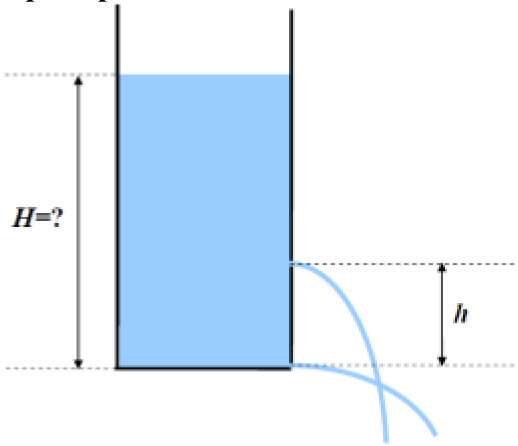

рисунок 2

В стенке цилиндрического сосуда с водой просверлены два цилиндрических отверстия площадью $S=0{,}1\,\text{см}^2$ каждое. Нижнее отверстие располагается непосредственно над уровнем дна сосуда, а верхнее – выше него на $h=5\,\text{см}$ (рисунок 2). Через другие мелкие отверстия, почти равномерно распределенные по стенкам, в сосуд аккуратно (без возникновения турбулентностей) подается вода, причем «приход» воды составляет $q=0{,}05$ л/с. Какой установится уровень воды в сосуде, если поддерживать такой режим достаточно долгое время? Ответ выразить в см и округлить до десятых.

Решение: Высота уровня воды в сосуде H установится неизменной, когда объем воды, вытекающий за некоторое время через отверстия, будет равен объему поступающей воды. Если обозначить скорость истечения воды из отверстия v, то расход воды через площадь отверстия S будет равен $v\cdot S$. Поэтому в нашем случае условие неизменности уровня

$$q=v_1S+v_2S=(v_1+v_2)S.$$

Естественно считать, что давление над свободной поверхностью жидкости в сосуде и давление на выходе обоих отверстий равно атмосферному. Тогда из уравнения Бернулли для нижнего (считаем его «первым») отверстия следует, что $v_1=\sqrt{2gH}$, а для верхнего – $v_2=\sqrt{2g(H-h)}$. Из записанных соотношений можно получить систему уравнений для скоростей, которая легко решается:

$$\left\{\begin{array}{c} v_1+v_2=\dfrac{q}{S} \\ v_1^2-v_2^2=(v_1-v_2)(v_1+v_2)=2gh \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} v_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q}{S}+\dfrac{2ghS}{q}\right) \\ v_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q}{S}-\dfrac{2ghS}{q}\right) \end{array}\right..$$

В результате находим:

$$H=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{1}{8g}\left(\frac{q}{S}+\frac{2ghS}{q}\right)^2=33{,}8\,\text{см}.$$