

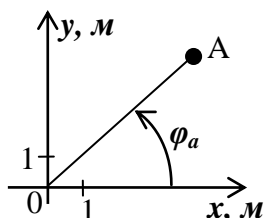
10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к вводу занятию 2.

Тема: «Вращение и криволинейное движение».

Мы говорим о вращательном движении, когда в выбранной системе координат изменяется направление на рассматриваемую точку от начала координат. В этом случае удобно ввести **угол поворота** – угол между «нулевой» осью (обычно это ось x системы координат) и лучом OA (см. рисунок, где угол поворота – это угол φ_a), отсчитываемом в «положительном»



направлении (обычно в математике «положительным» считают поворот против часовой стрелки). Удобно также использовать **радианную меру** угла поворота: в этом случае угол измеряется отношением длины соответствующей дуги окружности l_φ к радиусу

окружности R : $\varphi[\text{rad}] \equiv \frac{l_\varphi}{R}$. Так как для полной окружности это

отношение равно 2π , то $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$.

Быстроту изменения угла поворота характеризуют **угловой скоростью**, которую измеряют в рад/с. **Средняя угловая скорость за время Δt** – отношение изменения угла поворота за это

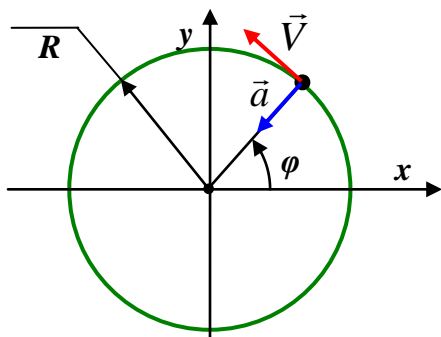
время $\Delta\varphi$ к величине этого интервала времени: $\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, **мгновенная угловая скорость** (для

«очень малого» интервала времени) $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}$. Следует обратить внимание, что, поскольку

мы договорились считать углы поворота положительными или отрицательными в зависимости от направления поворота, то и угловая скорость будет положительной или отрицательной в зависимости от направления вращения.

Самый простой случай вращательного движения возникает, когда расстояние до центра вращения остается неизменным. Ясно, что это – вращение по окружности некоторого радиуса R . Если за интервал времени Δt направление вращения не изменяется, то (при использовании радианной меры угла) пройденный путь равен длине пройденной дуги окружности, $s = R \cdot |\Delta\varphi|$, и поэтому средняя путевая скорость точки за это время связана со средней угловой скоростью простым соотношением $v_{cp} = R |\omega_{cp}|$. Ясно, что мгновенное значение путевой скорости равно модулю вектора мгновенной скорости и аналогично связана с мгновенной угловой скоростью: $v = |\vec{v}| = R |\omega|$.

Движение с постоянной угловой скоростью ($\omega = const$) называют **равномерным вращением**. Закон движения при равномерном вращении по окружности радиуса R наиболее просто



записать через закон изменения угла поворота: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. В декартовых координатах закон движения записывается с использованием тригонометрических функций: $x(t) = R \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, $y(t) = R \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Путевая скорость при равномерном вращении постоянна, а вектор мгновенной скорости по модулю равен путевой скорости и направлен по касательной к окружности $|\vec{v}| = v = \omega R = const$. Ускорение при равномерном вращении перпендикулярно скорости и направлено к центру окружности, за что его называют **центростремительным ускорением**. Его модуль

зависит от скорости и радиуса окружности: $|\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = const$.

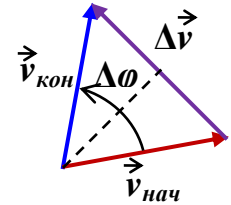
Пример 1: Материальная точка движется по окружности, совершая полный оборот за время $T = 4$ с. При этом величина ее скорости постоянна и равна $v = 3,14$ м/с. Найдите радиус окружности в метрах, с точностью до сотых.

Решение: Так как полный оборот соответствует 2π радианам, то угловая скорость $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 1,57$ рад/с. Поэтому радиус окружности $R = \frac{v}{\omega} \approx 2,00$ м.

Пример 2: Маленький шарик, вращаясь равномерно по окружности радиуса $R = 2$ м, за интервал времени $\Delta t = 3$ с повернулся вокруг центра окружности на угол $\Delta\varphi = 6$ рад. Найдите величину его мгновенного ускорения и величину среднего ускорения за этот интервал времени.

Решение: Сначала определим угловую скорость вращения: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2$ рад/с. Тогда ясно, что

модуль мгновенного ускорения $|\vec{a}| = \omega^2 R = 8$ м/с². Для определения среднего ускорения необходимо подсчитать модуль разности начальной и конечной скоростей $|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_{кон} - \vec{v}_{нач}|$. Эти вектора равны друг другу по модулю ($|\vec{v}_{кон}| = |\vec{v}_{нач}| = \omega R = 4$ м/с), а угол между ними равен углу поворота. Это ясно из того соображения, что каждый из векторов скорости перпендикулярен своему радиусу, и поэтому угол поворота вектора скорости равен углу поворота радиуса. Из векторного треугольника $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{кон} - \vec{v}_{нач}$ видно, что $|\Delta\vec{v}| = 2\omega R \sin(\Delta\varphi/2) \approx 1,13$ м/с. Следовательно, среднее ускорение



$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \approx 0,38 \text{ м/с}^2.$$

При **неравномерном вращении** по окружности наряду с центростремительным ускорением (которое также иногда называют «**нормальным**») возникает **касательное** (или **тангенциальное**) ускорение. Величина этого ускорения связана со «скоростью изменения модуля скорости» $|a_\tau| = \left| \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} \right|$, а направлено оно по вектору скорости (если

$\left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} > 0$) или против него (если $\left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} < 0$). Важно понимать, что тангенциальное ускорение возникает из-за изменения скорости по величине, а центростремительное – из-за изменения скорости по направлению. В общем случае ускорение есть сумма этих компонент:

$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_{цс}$.

Важная особенность вращательного движения – это существование очень прямой аналогии между ним и прямолинейным движением. Например, закон изменения угла поворота при равномерном вращении $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$ полностью аналогичен закону изменения координаты при равномерном прямолинейном движении $x(t) = x_0 + vt$. Эту аналогию можно использовать для получения новых соотношений. Например, из того факта, что при равноускоренном прямолинейном движении с законом изменения скорости $v_x(t) = v_0 + at$ закон изменения

координаты имеет вид $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, можно сделать вывод, что при неравномерном вращении с законом изменения угловой скорости $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$ закон изменения угла

поворота – это $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

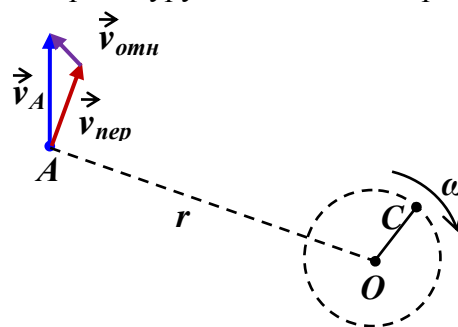
Пример 3: Космический корабль, вращающийся по круговой орбите, одновременно выпустил два зонда, которые полетели вдоль его орбиты в разные стороны. Угловые скорости зондов относительно планеты изменялись по законам $\omega_1(t) = \omega_{10} + \varepsilon t$ и $\omega_2(t) = \omega_{20} - \varepsilon t$, где

$\omega_{10} = \pi \cdot 10^{-3}$ рад/с, $\omega_{20} = -\frac{\pi}{2} \cdot 10^{-3}$ рад/с, и $\varepsilon = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-6}$ рад/с². Положительным направлением вращения тут считается направление вращения корабля. Через какое время зонды встретятся?

Решение: Пользуясь аналогией с прямолинейным движением, запишем законы изменения углов поворота зондов: $\varphi_1(t) = \omega_{10}t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ и $\varphi_2(t) = \omega_{20}t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Зонды вращаются в противоположные стороны. Нужно понять, что условием первой встречи зондов на орбите является то, что разность их углов поворота, равная нулю при $t = 0$, достигает значения 2π в момент встречи: $2\pi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = (\omega_{10} - \omega_{20})t + \varepsilon t^2$. Значит, искомое время есть положительный корень квадратного уравнения $t^2 + \frac{\omega_{10} - \omega_{20}}{\varepsilon}t - \frac{2\pi}{\varepsilon} = 0$. В результате

$$\text{получаем: } t = \frac{-(\omega_{10} - \omega_{20}) + \sqrt{(\omega_{10} - \omega_{20})^2 + 8\pi\varepsilon}}{2\varepsilon} = 1000\text{с.}$$

Очень интересный вопрос, связанный с вращательным движением – использование вращающегося тела в качестве *тела отсчета*. Рассмотрим процедуру вычисления скорости материальной точки А относительно вращающегося тела С. Пусть \vec{v}_A – скорость этой точки относительно «неподвижной» системы отсчета, относительно которой С вращается с угловой скоростью ω вокруг точки О. Чтобы понять, какова скорость А относительно С, рассмотрим точку, совпадающую по положению с точкой А, но наверняка неподвижную относительно С. Ясно, что такой точкой будет точка, вращающаяся вокруг О вместе с С, то есть с той же угловой скоростью. Скорость такой воображаемой точки относительно неподвижной системы отсчета называют «*переносной скоростью*» – она перпендикулярна линии, соединяющей О с А и равна по величине $v_{пер} = \omega r$. Теперь понятно, что скорость А относительно С равна векторной разности скорости А и переносной скорости: $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_A - \vec{v}_{пер}$. Отметим, что в этом вычислении мы не использовали вектор скорости С относительно неподвижной системы отсчета!



Пример 4: Маленький мальчик катается на карусели, сидя почти неподвижно в кресле, которое вращается вокруг вертикальной оси карусели с угловой скоростью 0,75 рад/с по окружности с радиусом 2 м. Его отец едет на велосипеде со скоростью 4,5 м/с по дорожке, проходящей мимо карусели. В момент, когда он проезжает точку дорожки, наиболее близкую к карусели, его сын тоже проходит точку своей траектории, наиболее близкую к дорожке, при этом расстояние между ними равно 4 м, и их скорости относительно Земли сонаправлены. Найдите величину скорости отца относительно сына в этот момент времени.

Решение: Очень часто при решении этой задачи учащиеся школ дают ответ 3 м/с (скорость сына относительно Земли равна 1,5 м/с, а отца – 4,5 м/с, и эти скорости сонаправлены, поэтому модуль векторной разности этих скоростей равен 3 м/с). Но этот ответ неверен, так как в этом вычислении не учитывается, что движение сына вращательное. В самом деле, если мы рассмотрим воображаемую точку, совпадающую с положением отца, и при этом участвующую во вращательном движении вокруг оси карусели с угловой скоростью 0,75 рад/с, то величина скорости этой точки $v_{пер} = \omega r = 0,75 \text{ рад/с} \cdot (2 + 4) \text{ м} = 4,5 \text{ м/с}$, причем она сонаправлена со скоростью отца! Как видно, скорость отца в точности совпадает с переносной скоростью, то есть он неподвижен относительно сына в этот момент времени, и правильный ответ – это ноль!