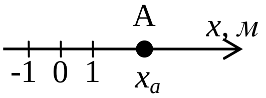
10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

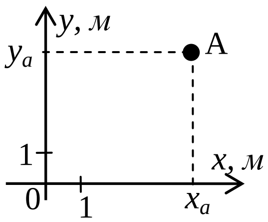
Теоретический обзор к вводному занятию 1.

Тема: «Метод координат и векторные величины в механике».

Одно из самых важных физических явлений, с которыми мы сталкиваемся в окружающем нас мире – движение. Так мы называем *изменение положения одного тела* ***относительно другого*** *с течением времени*. Действительно, утверждение «тело движется» имеет относительный характер (то есть зависит от наблюдателя): мячик, лежащий на сиденье автомобиля, едущего по автостраде, движется относительно идущего по обочине пешехода и покоится относительно водителя автомобиля. Физики используют понятие «***тело отсчета***» - это тело, относительно которого мы рассматриваем движение остальных тел в данном исследовании (опыте или задаче). Для количественного описания положения тел мы обычно используем *координаты*: например, для небольшого тела А, движущегося вдоль одной прямой, мы можем ввести координату x на этой прямой. Для этого нужно направить вдоль

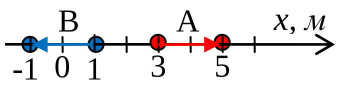
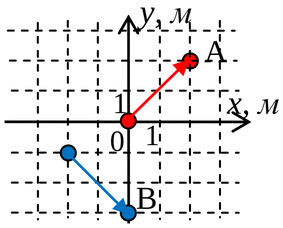
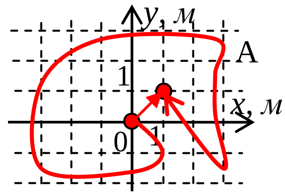


прямой координатную ось (выбрать направление), ввести единицу измерения координаты (например, метры), выбрать начало отсчета координаты (точку с координатой $x=0$). Теперь координата тела – это расстояние от начала отсчета до тела, выраженное в метрах, со знаком «плюс» или «минус». Если тело движется, то его координата изменяется с течением времени. Итак, для описания движения нам нужна ***Система Отсчета***: тело отсчета, связанная с ним система координат и прибор для измерения времени. Закон изменения $x(t)$ называют *законом движения* тела в выбранной СО.



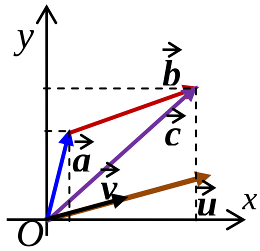
Если тело движется в плоскости (например, по плоскому участку поверхности Земли), то его положение можно описать **двумя** координатами (x и y), отсчитываемыми по двум взаимно-перпендикулярным осям. Такие координаты называют «декартовыми». Закон движения тела при этом задается двумя уравнениями ($x(t)$ и $y(t)$). Аналогично можно ввести декартовы координаты и в трехмерном пространстве: в этом случае мы будем использовать три взаимно-перпендикулярные оси, и набор из трех координат (x, y, z). При движении тело проходит по некоторой линии, которую называют ***траекторией*** тела.

Два важных понятия, которые надо уметь различать – это ***путь*** и ***перемещение*** тела. Путь – это пройденное телом расстояние, то есть *длина его траектории*. Для определения пути не важно, была траектория прямой или изгибалась, важно только ее общая длина от начала до конца рассматриваемого движения. Путь – это всегда **число**. Перемещение – это *изменение положения* тела. Оно характеризуется не только числом, но и направлением: результат перемещения на поверхности Земли «на 100 м в юго-западном направлении» совсем не совпадает с результатом перемещения «на 100 м в восточном направлении». Изменение положения тела можно описать, сообщив изменение его координат в выбранной СО: $\Delta x_A = x_A(t_{кон}) - x_A(t_{нач})$ – перемещение тела на интервале времен от $t_{нач}$ до $t_{кон}$.

 Тела А и В прошли одинаковый путь 2 м, но переместились в разных направлениях: $\Delta x_A = +2$ м, $\Delta x_B = -2$ м.	 Тела А и В прошли одинаковый путь $2\sqrt{2}$ м $\approx 2{,}8$ м, но переместились в разных направлениях: $\Delta x_A = +2$ м, $\Delta y_A = +2$ м; $\Delta x_B = +2$ м, $\Delta y_B = -2$ м.	 Тело А прошло значительный путь при малом перемещении: $\Delta x_A = +1$ м, $\Delta y_A = +1$ м, $s_A \approx 19$ м.

Если тело перемещается только в одном направлении, его путь равен величине перемещения. В любом другом случае для движущегося тела путь больше величины перемещения.

Быстроту перемещения тела описывают с помощью физической величины, которую называют *скорость*. Это понятие часто используют и в житейских ситуациях. Важно обратить внимание, что в физике мы имеем дело с целом набором величин, называемых этим термином. В наиболее общем смысле мы говорим о скорости как о величине, характеризующейся (как и перемещение) не только числовым значением, но и направлением (в физике и математике такие величины называют ***векторами*** и при записи помечают особо: вектор перемещения $\Delta\vec{r}$, вектор скорости $\vec{v}$). Такая скорость – это отношение перемещения за время t к величине этого интервала времени: $\vec{v}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{t}$. Если интервал времени взять очень малым (как говорят математики, «устремить к нулю»), то мы придем к понятию ***мгновенной скорости***: $\vec{v}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}|_{\Delta t\to 0}$. Те, кто знаком с понятием *дифференцирования*, легко узнают в этом определении ***производную***: мгновенная скорость есть производная координаты по времени: $\vec{v}=\vec{r}_t'$. В «обыденной жизни» часто используют величину скорости, которую физики называют ***путевой скоростью***. Здесь можно ввести **среднюю скорость на участке пути** $v_{ср}=\dfrac{s}{t}$, и **мгновенную путевую скорость** (рассмотрев «очень малый» участок пути) $v=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}|_{\Delta s\to 0}\equiv s_t'$. Векторные величины очень важны в физике, поэтому уделим им дополнительное внимание. Вектор («направленный отрезок») задается как геометрический образ, и при этом *постулируется* (то есть принимается как безусловно верные) ряд его свойств. Например, постулируется его независимость от выбора системы координат. Вектор не изменяется при **параллельном переносе**, что позволяет определить его координаты как координаты его конца после перенесения начала в начало координат (нетрудно заметить, что аналогично можно определить координаты вектора как разность координат конца и начала). Сложение векторов и их умножение на число определяется геометрически, и может быть записано в терминах координат: например, сложение векторов:



$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}c_x=a_x+b_x\\c_y=a_y+b_y\end{cases}.$$

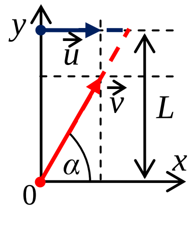
Умножение на число: $\vec{u}=k\cdot\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}u_x=k\cdot v_x\\u_y=k\cdot v_y\end{cases}$

С помощью векторного сложения можно определять связь скоростей относительно разных Систем Отсчета: например,

Скалярное произведение векторов: согласно геометрическому определению – это число («скаляр»), равное $(\vec{a}\cdot\vec{b})\equiv|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\gamma)$, где γ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Заметим, что скалярное произведение перпендикулярных векторов всегда равно нулю. С помощью скалярного произведения можно компактно записывать многие соотношения. Например, длину вектора можно найти, возводя его скалярно в квадрат: , откуда . Нетрудно заметить, что мы в этой выкладке фактически доказали теорему, известную в геометрии как «теорема косинусов».

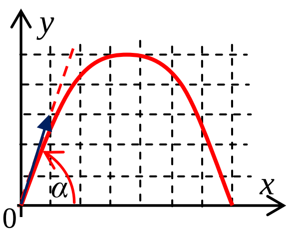
Метод координат и векторные соотношения можно эффективно использовать в решении задач механики.

Пример 1. Собака сидела на полянке в парке, а ее хозяин стоял на дорожке. Соединяющая их прямая перпендикулярна дорожке, а расстояние между ними равнялось 9 м. Хозяин побежал по дорожке с некоторой постоянной скоростью *u*, и собака в тот же момент побежала с вдвое большей постоянной скоростью *v* = 2 *u*. Она выбрала направление бега столь удачно, что догнала хозяина, не меняя этого направления. Какое расстояние успел пробежать хозяин до того, как собака его догнала?



Введем систему координат так, как показано на рисунке. Для ответа на вопрос достаточно заметить, что для одновременного прибытия в точку встречи собака и хозяин должны сместится на одинаковое расстояние вдоль оси x за одинаковое время, то есть $v_x = u$. Но тогда $v_y = \sqrt{v^2 - u^2} = \sqrt{(2u)^2 - u^2} = u\sqrt{3}$. Следовательно, время «погони» $t = \dfrac{L}{u\sqrt{3}}$, и путь хозяина $s = ut = \dfrac{L}{\sqrt{3}} \approx 5{,}2\,\text{м}$.

Пример 2. Один из самых известных примеров использование метода координат в «школьных» задачах механики – анализ движения тела, брошенного под углом к горизонту, в отсутствие сопротивления воздуха (либо скорости тел достаточно малы, так что эти силы незначительны и ими можно пренебречь, либо мы изучаем движение там, где нет воздуха – например, на Луне). В этом случае ускорение тела равно ускорению свободного падения, которое задает направление вертикали. Тогда в системе координат, в которой ось x горизонтальна, а ось y вертикальна, движение по оси x будет равномерным: $x(t) = v_0\cos(\alpha)t$,



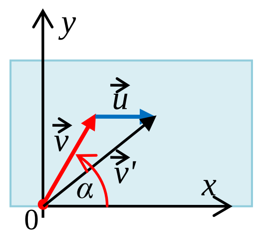
а по оси y – равноускоренным: $y(t) = v_0\sin(\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}$. Исключив t из этих уравнений, можно получить уравнение траектории: $y(x) = \mathrm{tg}(\alpha)\,x - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2$. Как видно, это парабола с вертикальной осью. Легко найти все характеристики этого движения: в процессе подъема вертикальная скорость тела уменьшается от $v_0\sin(\alpha)$ до нуля, и время подъема $t_n = \dfrac{v_0\sin(\alpha)}{g}$. Поэтому максимальная высота подъема $H = y(t_n) = \dfrac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}$.

Полное время полета до падения обратно на Землю $T = 2t_n = \dfrac{2v_0\sin(\alpha)}{g}$, и дальность полета

$$L = x(T) = v_0\cos(\alpha)T = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha).$$

Отметим, что на самом деле этот пример относится не только к движению тела, брошенного под углом к горизонту – движение по параболе возникает всегда, когда вдоль одной из координатных осей в некоторой плоскости тело движется равномерно, а вдоль другой – равноускоренно!

Рассмотрим примеры с использованием векторного сложения.



Пример 3. Катер плывет по прямолинейному участку реки. Гребные винты работают так, что поддерживают постоянную скорость катера относительно воды 10 м/с, рулевой держит постоянный курс, направляя эту скорость под углом 60° к берегу. Скорость течения реки на этом участке постоянна и равна 3 м/с. С какой скоростью движется катер относительно берега? Ясно, что скорость катера относительно берега будет суммой скорости воды и скорости катера относительно воды: $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$. Можно использовать два подхода:

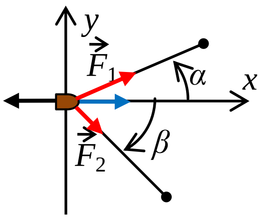
1) Использовать проекции скоростей на оси, показанные на рисунке: $v'_x = v_x + u = v\cos(\alpha) + u$ и $v'_y = v_y = v\sin(\alpha)$, и тогда модуль скорости относительно берега $v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{v^2 + u^2 + 2vu\cos(\alpha)} \approx 11{,}8\,\text{м/с}$.
2) Использовать скалярное умножение: $v'^2 = \vec{v}'^2 = (\vec{v} + \vec{u})^2 = v^2 + u^2 + 2vu\cos(\alpha)$. После извлечения квадратного корня получается то же самое выражение.

Заметим, что во втором варианте мы фактически доказали известную в геометрии теорему косинусов.

Также можно поступать и с другими векторами. Еще одна важная для нас векторная величина – сила. Силы мы используем для описания взаимодействий между телами, а результат взаимодействия зависит не только от величины воздействия, но и от его направления. Силы также складываются по векторному закону.

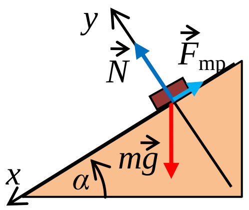
Пример 4. На тело массой 2 кг действуют две силы. Одна из них имеет величину 8 Н, другая – 3 Н. Угол между направлениями действия этих сил равен 120°. Найти модуль ускорения тела.

Ясно, что модуль ускорения определяется результирующей силой, которая равна векторной сумме обеих сил: $|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|}{m}$. Величину результирующей силу можно находить как в предыдущем примере: $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\alpha)$. Поэтому $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(\alpha)} = 7$ Н, и $|\vec{a}| = 3{,}5$ м/с^2.



Пример 5. Два тягача тянут груз по горизонтальной поверхности так, что он двигается по прямой. Трос первого тягача натянут с силой 8 кН, и составляет с линией движения груза угол 30°. Трос второго составляет с этой линией угол 45°. Найти силу натяжения троса второго тягача.

Направим ось x по линии движении груза, а y – перпендикулярно ей. На груз в горизонтальной плоскости действуют силы натяжения обоих тросов и сила трения. Однако сила трения (скольжения) направлена против скорости, то есть ее проекция на ось y равна нулю. Между тем вдоль этой оси груз не движется, так что и сумма проекций сил натяжения тоже должна равняться нулю. Значит, $F_1\sin(\alpha) - F_2\sin(\beta) = 0$. Следовательно, $F_2 = F_1\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{F_1}{\sqrt{2}} \approx 5{,}657$ кН.



Пример 6. Тело поместили на наклонную плоскость, составляющую угол 30° с горизонтом и отпустили без начальной скорости. В начальный момент тело находилось на высоте 40 см над началом плоскости. За какое время оно достигнет начала плоскости, если коэффициент трения тело о плоскость $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}29$, а ускорение свободного падения можно считать равным 10 м/с^2?

Направим ось x по линии движении «падения воды» на плоскости, а ось y – перпендикулярно ей, и изобразим на рисунке силы, действующие на него: это сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Так как тело не движется по оси y, то $N = mg\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$. Отметим, что сдвиг тела по оси x (если тело придет в движение, то есть если сила трения не сумеет ему помешать) вызывает проекция силы тяжести на ось x, равная $mg_x = mg\sin(\alpha) = \frac{1}{2}mg$. Максимальное значение силы трения покоя $F_{тр}^{\max} = \mu N = \frac{1}{4}mg < \frac{1}{2}mg$, и, как видно, тело действительно начнет скользить вниз, и сила трения скольжения $F_{тр} = \frac{1}{4}mg$. Ускорение тела вдоль оси равно $a_x = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}mg - \frac{1}{4}mg\right) = \frac{1}{4}g \approx 2{,}5$ м/с^2. Телу нужно проехать вдоль плоскости на расстояние $s = \frac{h}{\sin(\alpha)} = 2h = \frac{a_x t^2}{2}$, и поэтому $t = 2\sqrt{\frac{h}{a_x}} = 4\sqrt{\frac{h}{g}} \approx 0{,}8$ с.

Более подробно физическое содержание задач механики о движении тел разобрано в **занятии 1** основного курса.