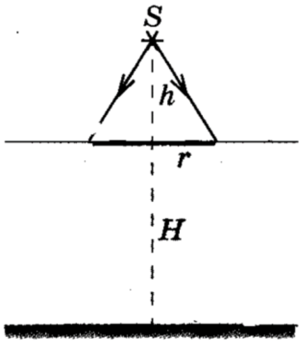
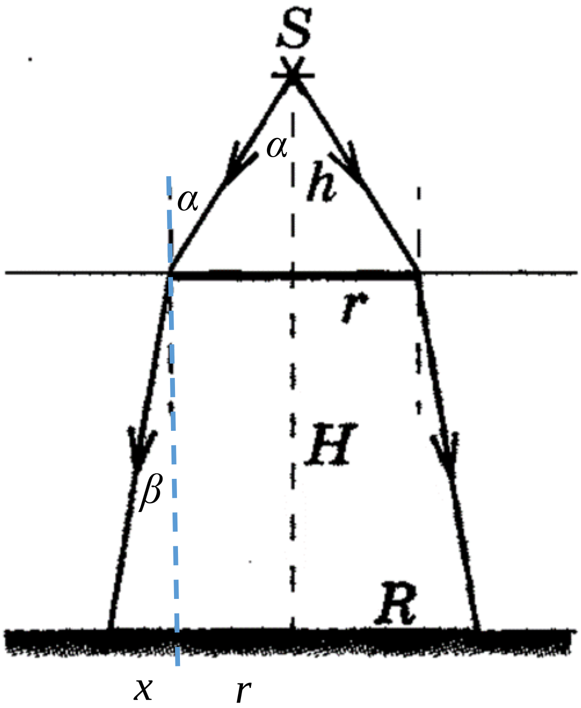
На поверхности озера, имеющего глубину $H = 4$ м, плавает диск радиусом $r = 3$ м, над центром которого на некоторой высоте h расположен точечный источник света (рис.). Какова должна быть высота h, чтобы радиус R тени на дне озера был в 2 раза больше радиуса самого диска? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.





Решение.
По закону отражения:
$\sin\alpha = n\sin\beta$.
Из геометрических соображений выразим $\sin\alpha$ и $\sin\beta$:

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}}.$$

Подставим это в первое выражение:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{nx}{\sqrt{x^2 + H^2}}.$$

Возведем полученное равенство в квадрат:

$$\frac{r^2}{r^2 + h^2} = \frac{n^2x^2}{x^2 + H^2}.$$

Выразим отсюда x:

$$r^2(x^2 + H^2) = n^2x^2(r^2 + h^2),$$

$$r^2H^2 = n^2x^2r^2 + n^2x^2h^2 - r^2x^2,$$

$$r^2 H^2 = x^2 (n^2 r^2 + n^2 h^2 - r^2),$$

$$x = \frac{rH}{\sqrt{n^2 r^2 + n^2 h^2 - r^2}}.$$

Из условия задачи:

$$R = r + x = 2r \Rightarrow x = r.$$

Подставляем вместо x значение r:

$$r = \frac{rH}{\sqrt{n^2 r^2 + n^2 h^2 - r^2}} \Rightarrow H = \sqrt{n^2 r^2 + n^2 h^2 - r^2};$$

возводим последнее равенство в квадрат:

$$H^2 = n^2 r^2 + n^2 h^2 - r^2,$$

$$n^2 h^2 = H^2 - n^2 r^2 + r^2 = H^2 - r^2 (n^2 - 1),$$

$$h = \frac{\sqrt{H^2 - r^2 (n^2 - 1)}}{n}.$$

Ответ: $h = \dfrac{\sqrt{H^2 - r^2 (n^2 - 1)}}{n}$.