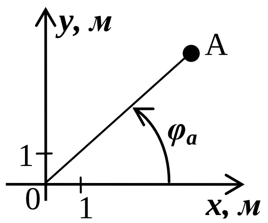
10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к вводному занятию 4.

Тема: «Вращение».

Мы говорим о вращательном движении, когда в выбранной системе координат изменяется направление на рассматриваемую точку от начала координат. В этом случае удобно ввести ***угол поворота*** – угол между «нулевой» осью (обычно это ось x системы координат) и лучом ОА (см. рисунок, где угол поворота – это угол φ_a), отсчитываемом в «положительном»



направлении (обычно в математике «положительным» считают поворот против часовой стрелки) Удобно также использовать **радианную меру** угла поворота: в этом случае угол измеряется отношением длины соответствующей дуги окружности l_φ к радиусу окружности R: $\varphi[рад] \equiv \frac{l_\varphi}{R}$. Так как для полной окружности это отношение равно 2π, то $2\pi\ рад = 360°$. Соответственно $1\ рад = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$. Такое измерение углов в механике очень удобно, и нужно уметь им пользоваться.

Пример 1: Выразить величину углов 30°, 45°, 120°, 105° и 2,5° в радианной мере.

Решение: Ясно, что, например $30° = \frac{180°}{6} = \frac{\pi}{6} рад \approx 0{,}52\, рад$. Аналогично $45° = \frac{180°}{4} = \frac{\pi}{4} рад \approx 0{,}785\, рад$, $120° = 90° + 30° = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) рад = \frac{2\pi}{3} рад \approx 2{,}1\, рад$, $105° = 90° + 15° = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) рад = \frac{7\pi}{12} рад \approx 1{,}83\, рад$ и $2{,}5° = \frac{30°}{12} = \frac{\pi}{72} рад \approx 0{,}044\, рад$.

Пример 2: Материальная точка, двигаясь по окружности радиуса 4 м в положительном направлении вращения, прошла расстояние в 6,8 м. Найти угол ее поворота в радианах и градусах.

Решение: Согласно определению радианной меры угла, $\varphi \equiv \frac{l_\varphi}{R} = 1{,}7\ рад = 1{,}7 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 97{,}4°$.

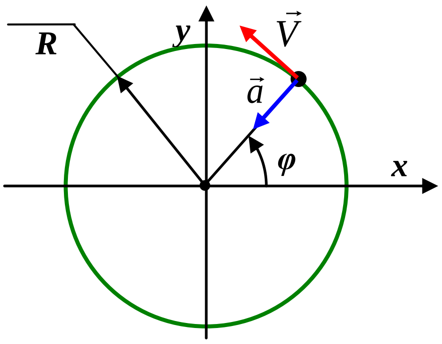
Быстроту изменения угла поворота характеризуют ***угловой скоростью***, которую измеряют в рад/с. ***Средняя угловая скорость за время*** Δt – отношение изменения угла поворота за это время $\Delta\varphi$ к величине этого интервала времени: $\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, ***мгновенная угловая скорость*** (для «очень малого» интервала времени) $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}|_{\Delta s \to 0}$. Следует обратить внимание, что, поскольку мы договорились считать углы поворота положительными или отрицательными в зависимости от направления поворота, то и угловая скорость будет положительной или отрицательной в зависимости от направления вращения.

Пример 3: Материальная точка, двигаясь по окружности по часовой стрелке, совершает полный оборот за 3 с. Найти ее угловую скорость. Положительным направлением вращения считать вращение против часовой стрелки.

Решение: В этом случае угловая скорость должна считаться отрицательной, причем за 3 с точка в отрицательном направлении проходит $2\pi\ рад$. Значит, $\omega = \frac{-2\pi\ рад}{3\ с} \approx -2{,}09\, рад/с$.

Самый простой случай вращательного движения возникает, когда расстояние до центра вращения остается неизменным. Ясно, что это – вращение по окружности некоторого радиуса R. Если за интервал времени Δt направление вращения не изменяется, то (при использовании радианной меры угла) пройденный путь равен длине пройденной дуги окружности, $s = R \cdot |\Delta\varphi|$, и поэтому средняя путевая скорость точки за это время связана со средней угловой скоростью простым соотношением $v_{ср} = R|\omega_{ср}|$. Ясно, что мгновенное значение путевой скорости равно модулю вектора мгновенной скорости и аналогично связана с мгновенной угловой скоростью: $v = |\vec{v}| = R|\omega|$.

Движение с постоянной угловой скоростью ($\omega = const$) называют **равномерным вращением**. Закон движения при равномерном вращении по окружности радиуса R наиболее просто



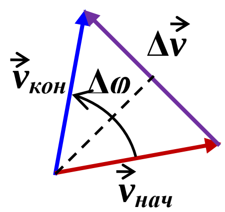
записать через закон изменения угла поворота: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. В декартовых координатах закон движения записывается с использованием тригонометрических функций: $x(t) = R \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, $y(t) = R \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$. Путевая скорость при равномерном вращении постоянна, а вектор мгновенной скорости по модулю равен путевой скорости и направлен по касательной к окружности $|\vec{v}| = v = \omega R = const$. Ускорение при равномерном вращении перпендикулярно скорости и направлено к центру окружности, за что его называют ***центростремительным ускорением***. Его модуль зависит от скорости и радиуса окружности: $|\vec{a}| = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R} = const$.

Пример 4: Материальная точка движется по окружности, совершая полный оборот за время $T = 4$ с. При этом величина ее скорости постоянна и равна $v = 3{,}14$ м/с. Найдите радиус окружности в метрах, с точностью до сотых.

Решение: Так как полный оборот соответствует 2π радианам, то угловая скорость $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \approx 1{,}57$ рад/с. Поэтому радиус окружности $R = \dfrac{v}{\omega} \approx 2{,}00$ м.

Пример 5: Маленький шарик, вращаясь равномерно по окружности радиуса $R = 2$ м, за интервал времени $\Delta t = 3$ с повернулся вокруг центра окружности на угол $\Delta\varphi = 6$ рад. Найдите величину его мгновенного ускорения и величину среднего ускорения за этот интервал времени.

Решение: Сначала определим угловую скорость вращения: $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2$ рад/с. Тогда ясно, что

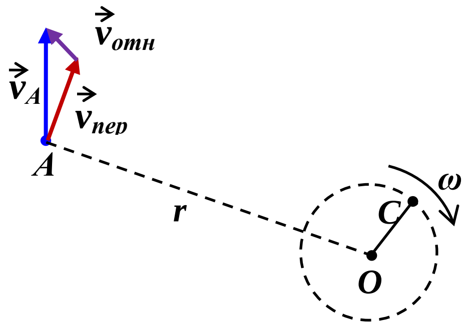


модуль мгновенного ускорения $|\vec{a}| = \omega^2 R = 8$ м/с^2. Для определения среднего ускорения необходимо подсчитать модуль разности начальной и конечной скоростей $|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_{кон} - \vec{v}_{нач}|$. Эти вектора равны друг другу по модулю ($|\vec{v}_{кон}| = |\vec{v}_{нач}| = \omega R = 4$ м/с), а угол между ними равен углу поворота. Это ясно из того соображения, что каждый из векторов скорости перпендикулярен своему радиусу, и поэтому угол поворота вектора скорости равен углу поворота радиуса. Из векторного треугольника $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{кон} - \vec{v}_{нач}$ видно, что $|\Delta\vec{v}| = 2\omega R \sin(\Delta\varphi / 2) \approx 1{,}13$ м/с. Следовательно, среднее ускорение $|\vec{a}_{ср}| = \dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \approx 0{,}38$ м/с^2.

Важная особенность вращательного движения – это существование очень прямой аналогии между ним и прямолинейным движением. Например, закон изменения угла поворота при равномерном вращении $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$ полностью аналогичен закону изменения координаты при равномерном прямолинейном движении $x(t) = x_0 + vt$. Эту аналогию можно использовать для получения новых соотношений. Например, из того факта, что при равноускоренном прямолинейном движении с законом изменения скорости $v_x(t) = v_0 + at$ закон изменения координаты имеет вид $x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, можно сделать вывод, что при неравномерном вращении с законом изменения угловой скорости $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$ закон изменения угла поворота – это $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$.

Пример 6: Космический корабль, вращающийся по круговой орбите, одновременно выпустил два зонда, которые полетели вдоль его орбиты в разные стороны. Угловые скорости зондов относительно планеты изменялись по законам $\omega_1(t) = \omega_{10} + \varepsilon t$ и $\omega_2(t) = \omega_{20} - \varepsilon t$, где $\omega_{10} = \pi \cdot 10^{-3}$ рад/с, $\omega_{20} = -\frac{\pi}{2} \cdot 10^{-3}$ рад/с, и $\varepsilon = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-6}$ рад/с^2. Положительным направлением вращения тут считается направление вращения корабля. Через какое время зонды встретятся?
Решение: Пользуясь аналогией с прямолинейным движением, запишем законы изменения углов поворота зондов: $\varphi_1(t) = \omega_{10} t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ и $\varphi_2(t) = \omega_{20} t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Зонды вращаются в противоположные стороны. Нужно понять, что условием первой встречи зондов на орбите является то, что разность их углов поворота, равная нулю при $t = 0$, достигает значения 2π в момент встречи: $2\pi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = (\omega_{10} - \omega_{20})t + \varepsilon t^2$. Значит, искомое время есть положительный корень квадратного уравнения $t^2 + \frac{\omega_{10} - \omega_{20}}{\varepsilon} t - \frac{2\pi}{\varepsilon} = 0$. В результате получаем: $t = \frac{-(\omega_{10} - \omega_{20}) + \sqrt{(\omega_{10} - \omega_{20})^2 + 8\pi\varepsilon}}{2\varepsilon} = 1000$ с.

Очень интересный вопрос, связанный с вращательным движением – использование вращающегося тела в качестве ***тела отсчета***. Рассмотрим процедуру вычисления скорости материальной точки A относительно вращающегося тела C. Пусть $\vec{v}_A$ – скорость этой точки относительно «неподвижной» системы отсчета, относительно которой C вращается с угловой скоростью ω вокруг точки O. Чтобы понять, какова скорость A относительно C, рассмотрим точку, совпадающую по положению с точкой A, но наверняка неподвижную относительно C. Ясно, что такой точкой будет точка, вращающаяся вокруг O вместе с C, то есть с той же угловой скоростью. Скорость такой воображаемой точки относительно неподвижной системы отсчета называют «***переносной скоростью***» – она перпендикулярна линии, соединяющей O с A и равна по величине $v_{пер} = \omega r$. Теперь понятно, что скорость A относительно C равна векторной разности скорости A и переносной скорости: $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_A - \vec{v}_{пер}$. Отметим, что в этом вычислении мы не использовали вектор скорости C относительно неподвижной системы отсчета!



Пример 7: Маленький мальчик катается на карусели, сидя почти неподвижно в кресле, которое вращается вокруг вертикальной оси карусели с угловой скоростью 0,75 рад/с по окружности с радиусом 2 м. Его отец едет на велосипеде со скоростью 4,5 м/с по дорожке, проходящей мимо карусели. В момент, когда он проезжает точку дорожки, наиболее близкую к карусели, его сын тоже проходит точку своей траектории, наиболее близкую к дорожке, при этом расстояние между ними равно 4 м, и их скорости относительно Земли сонаправлены. Найдите величину скорости отца относительно сына в этот момент времени.
Решение: Очень часто при решении этой задачи учащиеся школ дают ответ 3 м/с (скорость сына относительно Земли равна 1,5 м/с, а отца – 4,5 м/с, и эти скорости сонаправлены, поэтому модуль векторной разности этих скоростей равен 3 м/с). Но этот ответ неверен, так как в этом вычислении не учитывается, что движение сына вращательное. В самом деле, если мы рассмотрим воображаемую точку, совпадающую с положением отца, и при этом участвующую во вращательном движении вокруг оси карусели с угловой скоростью 0,75 рад/с, то величина скорости этой точки $v_{пер} = \omega r = 0{,}75\,\text{рад/с} \cdot (2+4)\,\text{м} = 4{,}5\,\text{м/с}$, причем она сонаправлена со скоростью отца! Как видно, скорость отца в точности совпадает с переносной скоростью, то есть он неподвижен относительно сына в этот момент времени, и правильный ответ – это ноль!