$$I_2 = I_3 + I_6 \Rightarrow \frac{20P}{U/2-\varphi} = \frac{30P}{U/2+\varphi} + \frac{20P}{2\varphi} \Rightarrow \varphi^2 - \frac{U}{12}\varphi - \frac{U^2}{24} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{U}{4}.$$

Теперь легко находим: $U_2 = U_5 = \frac{U/4}{20} = \frac{U}{80} = 1{,}2\,\text{В}$, $U_3 = U_4 = \frac{3U/4}{30} = \frac{U}{40} = 2{,}4\,\text{В}$, $U_6 = \frac{U/2}{20} = \frac{U}{20} = 2{,}4\,\text{В}$. Для гирлянды 6 нужны такие же лампы, как для 3 и 4.

Ответ: Нужно 20 ламп с номиналом 4,8 В – для гирлянды 1, 80 ламп с номиналом 2,4 В – для гирлянд 3,4 и 6, и 40 ламп с номиналом 1,2 В – для гирлянд 2 и 5.

Критерии проверки:

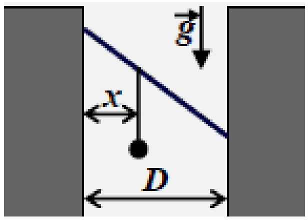
Учтена симметрия схемы (для потенциалов узлов или для сил токов)	**2**
Определено U_1	**1**
Записаны соотношения, связывающие силы тока в трех независимых гирляндах и потенциалы узлов	**3×2=6**
Все соотношения сведены к одному уравнению для одной неизвестной	**2**
Определены U_2 (или U_5), U_3 (или U_4) и U_6	**3×1=3**
Дан правильный ответ	**1**
ВСЕГО	**15**

БИЛЕТ № 04 (10 классы): ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

Задание 1:

Вопрос: Однородный стержень длины *L* подвешен горизонтально на трех одинаковых легких практически нерастяжимых нитях, одна из которых («первая») прикреплена к стержню на расстоянии *L*/4 от его левого конца, вторая прикреплена к середине стержня, а третья – на расстоянии *L*/3 от правого конца. В состоянии равновесия все три нити практически вертикальны. Во сколько раз отличаются силы натяжения третьей и первой нити в этом состоянии?

Задача: В зазоре шириной *D* = 60 см между двумя вертикальными поверхностями из твердого пластика «заклинили» однородный металлический стержень длиной *L* = 75 см. К стержню необходимо подвесить на легкой нити груз с массой, равной половине массы стержня. Известно, что деформации стенок зазора и стержня можно считать малыми, а деформации стержня – практически продольными (то есть стержень не изгибается, и сила упругости направлена вдоль его оси). Величина этой силы в *k* = 10/3 раза больше действующей на стержень силы тяжести. Коэффициент трения между концами стержня с стенками зазора можно считать очень близким к 1. На каком расстоянии *x* от «левой» (по рисунку) стенки зазора должна находиться точка прикрепления нити, чтобы после подвешивания груза стержень удержался в зазоре?



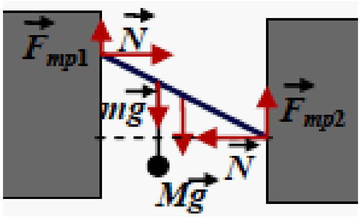
Ответ на вопрос: В состоянии равновесия сумма моментов действующих на стержень сил равна нулю. Если записывать его относительно центра масс стержня (так как стержень однороден, то он совпадает с его серединой), то в это уравнение не войдут сила тяжести и сила натяжения второй нити, имеющие нулевые плечи относительно этой точки. Из условие ясно, что плечи сил натяжения первой и третьей нити равны *L*/4 и *L*/6 соответственно. Потому условие моментов дает: $T_1 \frac{L}{4} = T_3 \frac{L}{6} \Rightarrow T_3 = 1{,}5 \cdot T_1$. Итак, сила натяжения третьей в полтора раза больше силы натяжения первой нити.

Критерии проверки:

Указано, что суммарный момент сил равен нулю	**1**
Правильно записаны следующие из условий равновесия уравнения, позволяющие найти искомое отношение сил натяжения	**3**
Эти уравнения сведены к одному уравнению для связи T_1 и T_3 (если уравнение моментов записано относительно ЦМ стержня, и одного этого уравнения хватает для анализа этой связи, то эти баллы ставятся автоматически)	**3**

Дан правильный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Стержень покоится под действием силы тяжести, силы натяжения нити (равной весу груза) и сил, действующих со стороны стенок зазора. Угол наклона стержня к горизонтали



определяется из условия $\cos(\alpha) = \frac{D}{L} = \frac{4}{5}$. Это означает, что $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{3}{4}$. Кроме того, ясно, что силы нормальных реакций стенок уравновешивают перпендикулярную стенкам составляющую силы упругости стержня $N = F \cdot \cos(\alpha)$. Условие равновесия сил в проекции на вертикальную ось дает $F_{mp1} + F_{mp2} = (M+m)g = \frac{3}{2}Mg$, а правило моментов приводит к уравнению $N \cdot D \cdot \operatorname{tg}(\alpha) + Mg\frac{D}{2} + \frac{M}{2}g \cdot x - F_{mp2}D = 0$, из которого находим

$$F_{mp2} = F \cdot \sin(\alpha) + \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{x}{D}\right) \text{ и } F_{mp1} = \frac{Mg}{2}\left(2 - \frac{x}{D}\right) - F \cdot \sin(\alpha).$$

Ограничения на величину силы трения $|F_{mp}| \le \mu N = \mu F \cdot \cos(\alpha) \approx \frac{8}{3}Mg$ является более жестким для силы трения, действующей на нижний конец стержня:

$$2Mg + \frac{Mg}{2}\left(1 + \frac{x}{D}\right) \le \frac{8}{3}Mg \Rightarrow x \le \frac{1}{3}D.$$

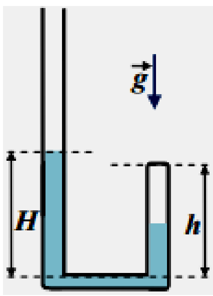
Ответ: точка подвеса груза должна находиться не далее трети ширины зазора от левой стенки.

Критерии проверки:

Определено значение угла наклона стержня (через тригонометрические функции)	**1**
Указано (используется в решении), что силы нормальной реакции $N = F \cdot \cos(\alpha)$	**2**
Правильно записано условие равновесия сил в проекции на вертикальную ось	**2**
Правильно записано уравнение условия равновесия моментов	**3**
Определено (используется в решении), что из условий на величину силы трения более жестким является для силы трения, действующей на нижний конец стержня	**2**
Записано правильное уравнение этого условия	**2**
Из условия на величину силы трения определяется ограничение на *x*	**1**
Получен правильный ответ	**2**
ВСЕГО	**15**

Задание 2:

Вопрос: Цилиндрический сосуд с гладкими вертикальными стенками помещен в камеру, из которой откачан воздух. В сосуде под подвижным поршнем находится 0,01 моля азота при температуре 301 К, и в состоянии равновесия поршень располагается на высоте 25 см над дном сосуда. Найдите массу поршня. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К), ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.



Задача: Гладкая запаянная с одного конца трубка образует два вертикальных «колена», соединенных внизу тонкой перемычкой (см рисунок). В запаянном сверху колене (высотой *h*) находится некоторое количество газа, в открытое наливают жидкость до определенного уровня. При «начальном» уровне жидкости H_0 газ занимал половину объема запаянного вертикального колена. Когда в открытое колено аккуратно долили жидкости так, что ее уровень в этом колене стал выше на $\frac{3}{4}h$, газ занимал уже только четверть объема запаянного колена. В открытое колено снова долили жидкости, и ее уровень поднялся еще на $0{,}3 \cdot h$. Какую часть объема запаянного колена занимает газ в этом состоянии?

Ответ на вопрос: Сила тяжести, действующая на поршень, уравновешивается давлением газа, то есть $Mg = pS$. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pS = \frac{pV}{h} = \frac{\nu RT}{h}$. Объединяя эти уравнения, находим $M = \frac{\nu RT}{gh} \approx 10$ кг.

Критерии проверки:

Записано условие равновесия поршня	**2**
Записано уравнение Менделеева-Клапейрона	**3**
Из этих уравнений выражена масса поршня	**3**
Дан правильный ответ	**2**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Обозначим x долю объема, занимаемого газом в запаянном колене при произвольном значении H. При этом высота столба жидкости в этом колене равна $h(1-x)$. Запишем условие баланса давлений

$$p_A + \rho g H = p + \rho g h(1-x)$$

и вычислим давление газа p из уравнения Менделеева-Клапейрона: $p \cdot xSh = \nu RT$. Следовательно, интересующая нас величина определяется выражением

$$\frac{a}{x} - x = \frac{H}{h} - 1 + \frac{p_A}{\rho g h} \equiv y,$$

в котором $a \equiv \frac{\nu RT}{\rho g h S}$ – постоянная величина. Запишем это соотношение для двух случаев, в которых x известно:

$$\left\{\begin{matrix} y_0 = \frac{a}{x_0} - x_0 = 2a - \frac{1}{2} \\ y_1 = y_0 + \frac{3}{4} = \frac{a}{x_1} - x_1 = 4a - \frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = \frac{1}{4} \\ y_0 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4x} - x = \frac{H - H_0}{h}.$$

Значит, зависимость x от высоты столба жидкости в открытом колене

$$x = -\frac{H - H_0}{2h} + \sqrt{\left(\frac{H - H_0}{2h}\right)^2 + \frac{1}{4}}.$$

В частности, при $H = H_0 + 1{,}05 \cdot h$ получаем, что $x = 0{,}2 = \frac{1}{5}$.

Ответ: 20 %.

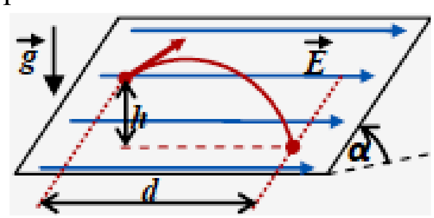
Критерии проверки:

Записано условие равновесия столба жидкости	**2**
Давление газа связано с x с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона.	**3**
Получено уравнение, связывающее x с H, содержащее не более двух параметров	**2**
Определены значения параметров зависимости $x(H)$	**2+2=4**
Получено уравнение для определения искомой величины без других неизвестных	**2**
Получен правильный численный ответ	**2**
ВСЕГО	**15**

Задание 3:

Вопрос: Ион с удельным зарядом $z = +10^5$ Кл/кг движется по гиперболической орбите в поле небольшого шарика с зарядом $q = -2$ нКл, заряженного равномерно по поверхности. Ион влетел внутрь сферы радиусом 10 см (вокруг центра шарика) со скоростью 8 км/с. Пренебрегая излучением и силами сопротивления, найдите скорость, с которой ион вылетит из этой сферы.

Задача: Плоская поверхность из диэлектрика с ε ≈ 1 составляет угол $\alpha = \arcsin(0{,}6) \approx 36{,}87°$ с горизонтом. У небольшой шайбы коэффициент трения о эту поверхность близок к 1. Если эта шайба начинает скользить по поверхности вверх вдоль линии падения воды со скоростью v_0, то она остановится на высоте h над точкой старта (по вертикали). Если в области пространства, в которой находится поверхность, создать однородное постоянное электрическое поле, то минимальная величина напряженности поля, при которой покоившаяся шайба придет в движение, равна



E_0. Если постоянное однородное поле с напряженностью E_0 будет направлено горизонтально параллельно поверхности, то при «запуске» шайбы по поверхности со скоростью v_0 существует такое направление начальной скорости, при котором шайба, пройдя по криволинейной траектории без отрыва от поверхности, остановится в точке, смещенной от точки запуска вдоль силовой линии $\vec{E}$ на расстояние d и вниз (по вертикали) на h. Найдите путь шайбы от старта до остановки в этом случае.

Ответ на вопрос: Электростатические силы потенциальны, и потенциальная энергия иона в поле шарика зависит только от расстояния между ним и центром шарика. Если пренебречь излучением и диссипативными силами, то механическая энергия иона за время полета внутри сферы не изменится. Значит, останется прежней кинетическая энергия. Тогда и скорость иона не изменится – она останется примерно равной 8 км/с.

Критерии проверки:

Указано (используется в решении), что в описанных условиях электростатические силы можно считать потенциальными.	**2**
Указано, что потенциальная энергия иона в поле шарика зависит только от расстояния между ним и центром шарика	**2**
В рассуждении корректно использован ЗСЭ	**3**
Дан правильный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Для запуска шайбы в отсутствие электрического поля кинетическая энергия шайбы переходит в ее потенциальную энергию в поле тяжести и теплоту, выделившееся благодаря трению о поверхность. Значит, $\dfrac{mv_0^2}{2} = mgh + \mu mg\cdot\cos(\alpha)\dfrac{h}{\sin(\alpha)} = mgh[1+\mu\cdot\mathrm{ctg}(\alpha)] = \dfrac{7}{3}mgh$.

Следовательно, $v_0^2 = \dfrac{14}{3}gh$. Минимальная напряженность поля, вызывающего скольжение шайбы, соответствует направлению поля вдоль линии падения воды: $qE_0 + mg\cdot\sin(\alpha) = \mu mg\cdot\cos(\alpha)$, и поэтому $qE_0 = \dfrac{1}{5}mg$. При «последнем» (из описанных) запусков ЗСЭ дает:

$$\frac{mv_0^2}{2} + qE_0 d + mgh - \mu mg\cdot\cos(\alpha)\cdot s = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{\mu mg\cdot\cos(\alpha)}\left[\frac{7}{3}mgh + \frac{1}{5}mgd + mgh\right] = \frac{25}{6}h + \frac{1}{4}d$$

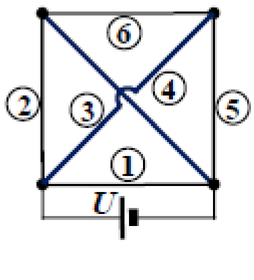
Ответ: $s = \dfrac{25}{6}h + \dfrac{1}{4}d$.

Критерии проверки:

Записан ЗСЭ для запуска шайбы в отсутствие электрического поля	**2**
Получена связь, эквивалентная $v_0^2 = \dfrac{14}{3}gh$	**2**
Записано условие начала скольжения при минимальной величине напряженности	**2**
Получена связь, эквивалентная $qE_0 = \dfrac{1}{5}mg$	**2**
Записан ЗСЭ для «последнего» запуска	**3**
Все величины выражаются через h и d	**2**
Получен правильный ответ	**2**
ВСЕГО	**15**

Задание 4:

Вопрос: У двух ламп одинаковые номинальные мощности, но при этом номинальное напряжение у первой в два раза больше, чем у второй. Во сколько раз отличаются сопротивления ламп при работе каждой в своем номинальном режиме?



Задача: Школьники решили к праздничному вечеру украсить квадратный зал гирляндами из 140 ламп. По плану нужно было соединить 6 гирлянд: четыре – по 20 ламп – по периметру зала и две – по 30 ламп – по его диагоналям.

Питание всех гирлянд нужно было сделать от одного источника, который при любой нагрузке создавал на своих клеммах напряжение U = 96 В (по схеме, показанной на рисунке). При этом важно было добиться, чтобы все 140 ламп светили одинаково. В распоряжении школьников было много ламп с одинаковыми КПД и одинаковыми номинальными мощностями, рассчитанных на разные номинальные напряжения, и оказалось, что необходимый набор ламп у них есть. Определите, каковы должны быть номинальные напряжения ламп в этом наборе и сколько ламп каждого типа нужно использовать. Каждая гирлянда состоит из ламп одинакового типа, и в «симметричных» парах гирлянд (2 и 5, 3 и 4) лампы тоже одинаковы. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало.

Ответ на вопрос: Мощность потребления лампы можно записать через напряжение и сопротивление: $P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{P}$. Соответственно соотношение сопротивлений рассматриваемых ламп в номинальном режиме $\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{4}$. Значит, сопротивление второй лампы в 4 раза меньше, чем у первой.

Критерии проверки:

Записана формула для мощности потребления лампы	**3**
Из нее выражено сопротивление лампы в номинальном режиме	**2**
Получена формула для соотношения сопротивлений	**2**
Получен правильный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Ясно, что лампы гирлянды 1 должны быть иметь номинальное напряжение $U_1 = \frac{U}{20} = 4{,}8\,\text{В}$. Пусть потенциал положительной клеммы источника равен $+\frac{U}{2}$, отрицательной $-\frac{U}{2}$, а φ – потенциал узла схемы, в котором соединяются гирлянды 2,3 и 6. Тогда потенциал «симметричного» по отношению к нему узла равен $-\varphi$. Обозначим P мощность, потребляемую любой лампой. Тогда сила тока через гирлянду 2 определяется из закона Джоуля-Ленца как отношение потребляемой мощности к напряжению, и она равна $I_2 = \frac{20P}{U/2-\varphi}$. Аналогично $I_3 = \frac{30P}{U/2+\varphi}$, а $I_6 = \frac{20P}{2\varphi}$. Уравнение непрерывности тока для узла с потенциалом φ дает:

$$I_2 = I_3 + I_6 \Rightarrow \frac{20P}{U/2-\varphi} = \frac{30P}{U/2+\varphi} + \frac{20P}{2\varphi} \Rightarrow \varphi^2 - \frac{U}{12}\varphi - \frac{U^2}{24} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{U}{4}.$$

Теперь легко находим: $U_2 = U_5 = \frac{U/4}{20} = \frac{U}{80} = 1{,}2\,\text{В}$, $U_3 = U_4 = \frac{3U/4}{30} = \frac{U}{40} = 2{,}4\,\text{В}$, $U_6 = \frac{U/2}{20} = \frac{U}{20} = 2{,}4\,\text{В}$. Для гирлянды 6 нужны такие же лампы, как для 3 и 4.

Ответ: Нужно 20 ламп с номиналом 4,8 В – для гирлянды 1, 80 ламп с номиналом 2,4 В – для гирлянд 3,4 и 6, и 40 ламп с номиналом 1,2 В – для гирлянд 2 и 5.

Критерии проверки:

Учтена симметрия схемы (для потенциалов узлов или для сил токов)	**2**
Определено U_1	**1**
Записаны соотношения, связывающие силы тока в трех независимых гирляндах и потенциалы узлов	**3×2=6**
Все соотношения сведены к одному уравнению для одной неизвестной	**2**
Определены U_2 (или U_5), U_3 (или U_4) и U_6	**3×1=3**
Дан правильный ответ	**1**
ВСЕГО	**15**