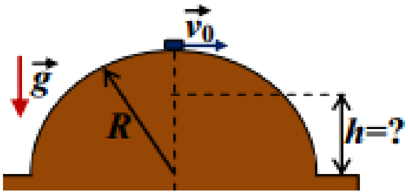
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «Робофест» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2023 года, ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7, 8 И 9 КЛАССОВ: ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

БИЛЕТ № 05 (9 классы):

Задание 1:

Вопрос: Какую минимальную по величине скорость необходимо сообщить маленькой шайбе на вершине гладкой полусферической горки радиуса R, чтобы она полетела (оторвавшись от поверхности горки) сразу после старта? Ускорение свободного падения g, сопротивление воздуха отсутствует.



Задача: На вершине полусферической гладкой горки радиусом $R = 45$см удерживали маленькую шайбу. Ее запустили скользить по поверхности горки, сообщив ей начальную скорость $v_0 = 1{,}5$ м/с. На какой высоте от основания горки шайба оторвется от ее поверхности? Какова будет максимальная величина ускорения шайбы во время ее скольжения по горке? Ускорение свободного падения считайте равным $g \approx 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ на вопрос: Если шайба не отрывается от поверхности горки, она движется по окружности радиуса R, и ее центростремительное ускорение на вершине горки создается разностью сил тяжести и силы нормальной реакции поверхности: $m\dfrac{v_0^2}{R} = mg - N \Rightarrow N = m\left(g - \dfrac{v_0^2}{R}\right)$. При отрыве обращается в ноль, так что минимальная необходимая для отрыва скорость $v_{\min} = \sqrt{gR}$.

Критерии проверки:

Используется правильное выражение для центростремительного ускорения шайбы	**1**
Правильно записано уравнение движения шайбы для центростремительной компоненты ускорения	**3**
Указано, что в точке отрыва сила нормальной реакции обращается в ноль	**3**
Получена правильная формула для минимальной скорости	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: В процессе скатывания шайбы с горки ее потенциальная энергия в поле тяжести будет переходить в кинетическую энергию: $mg(R-h) = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v^2(h) = v_0^2 + 2g(R-h)$. С другой стороны, уравнение для центростремительной компоненты ускорения шайбы движения следует, что $m\dfrac{v^2}{R} = N - mg\cdot\cos(\alpha)$ (N – сила нормальной реакции, действующая на шайбу со стороны поверхности горки), где угол α отклонения радиуса, проведенного в точку отрыва, связан с высотой h соотношением $\cos(\alpha) = \dfrac{h}{R}$. Снова, как и при ответе на вопрос, воспользуемся тем, что в точке отрыва $N = 0$. Тогда получаем уравнение $v_0^2 + 2g(R-h) = gR\cos(\alpha) = gh$. Решая его относительно высоты, получаем: $h = \dfrac{v_0^2}{3g} + \dfrac{2}{3}R = 37{,}5$ см.

Как ясно из общего уравнения движения $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$, величина ускорения в точке отрыва равна величине ускорения свободного падения. До этой точки $\vec{N}$ всегда уменьшает перпендикулярную поверхности компоненту ускорения, не влияя на касательную. Значит, до отрыва величина ускорения всегда меньше g. Таким образом, максимальная величина ускорения шайбы во время ее скольжения по горке равна величине ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Ответ: $h = \dfrac{v_0^2}{3g} + \dfrac{2}{3}R = 37{,}5$ см, максимальная величина ускорения шайбы равна $g \approx 10$ м/с^2.

Критерии проверки:

Правильно записано уравнение ЗСЭ для скатывания шайбы	**2**
Получена правильная связь скорости шайбы с ее высотой над основанием горки	**3**
Правильно записано уравнение движения шайбы для центростремительной компоненты ускорения	**2**
В решении используется условие отрыва $N=0$	**2**
Доказано, что величина ускорения шайбы достигает максимума в момент отрыва	**2**
Получен правильный численный ответ для высоты отрыва	**2**
Получен правильный численный ответ для максимального ускорения	**2**
ВСЕГО	**15**

Задание 2:

Вопрос: Тонкая металлическая пластина с двух сторон покрыта слоями одного и того же теплоизолирующего материала, причем слой «слева» от пластины в два раза толще, чем «справа». Слева от левого слоя поддерживается неизменная температура 29°С, а справа от правого слоя – неизменная температура 20°С. Чему равна установившаяся температура пластины? Ответ обосновать.

Задача: Через металлический брусок проходит трубка постоянного сечения, по которой можно пропускать воду. Брусок закреплен в воздухе на теплоизолирующих подставках. Температура воздуха в помещении поддерживается постоянной и равной 16,0°С. Если температуру воды в трубке на входе в брусок также поддерживать постоянной и равной 48,0°С, то в установившемся режиме (когда все температуры уже не изменяются) температура воды в трубке на выходе из бруска будет равна 27,1°С. Если при той же температуре воздуха в помещении начальная температура воды будет поддерживаться равной 54,0°С, то температура воды на выходе из бруска в установившемся режиме станет равна 31,3°С. Какой станет температура воды в трубке на выходе из бруска в установившемся режиме при той же температуре в помещении, если температуру воды в трубке на входе в брусок поддерживать равной 58,0°С? Теплопроводность металла намного лучше, чем у воды или стенок трубки.

Ответ на вопрос: Металл намного лучше проводит тепло, чем теплоизолирующий материал, так что температуру тонкой пластины t можно считать одинаковой во всех ее точках. В «установившемся» режиме потоки тепла через оба слоя теплоизолирующего материала одинаковы. По закону Фурье каждый поток прямо пропорционален разности температур по разные стороны от слоя и обратно пропорционален толщине слоя. Поэтому $\frac{t_Л - t}{2} = t - t_П \Rightarrow t = \frac{t_Л + 2t_П}{3} = 23°\text{C}$.

Критерии проверки:

Указано (используется в решении), что в «установившемся» режиме потоки тепла через оба слоя одинаковы	**2**
Указано (используется в решении), что каждый поток прямо пропорционален разности температур по разные стороны от слоя и обратно пропорционален толщине слоя	**3**
Получен правильный аналитический ответ	**3**
Получена правильный численный ответ	**2**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Для решения задачи нам нужно установить характер связи между температурой воды на входе в брусок в каждом случае t_{Hi}, температурой окружающей среды t_0 и температурой воды на выходе из бруска t_{Ki}. Ясно, что «в установившемся режиме» в единицу времени вода с плотностью ρ и удельной теплоемкостью c, текущая со скоростью v по трубке с сечением S, отдает количество теплоты $q = c\rho vS(t_H - t_K)$, и это же количество теплоты за то же время должно проходить от воды к металлу бруска и от него к окружающему воздуху. Согласно закону Фурье, эти количества теплоты пропорциональны разностям температур соответствующих тел (металлический брусок «хорошо» проводит тепло, поэтому будем считать, что его температура примерно постоянна по его объему). Считая, что стенки трубки, по которой течет вода, всюду одинаковы, приходим к выводу что в формуле закона Фурье в качестве ее температуры нужно брать среднюю $t_{cp} = \frac{t_H + t_K}{2}$.

Тогда, учитывая постоянство «геометрии системы:

$$\begin{cases} c\rho vS(t_{Hi}-t_{Ki})=\alpha(t_0-t) \\ c\rho vS(t_{Hi}-t_{Ki})=\beta\left(t-\dfrac{t_{Hi}+t_{Ki}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow t_{Ki}=\frac{2\alpha\beta t_0+\beta(2\gamma-\alpha)t_{Hi}}{2\beta\gamma+\alpha(2\gamma+\beta)},$$

где t – температура бруска, $\gamma=c\rho vS$, а α и β – постоянные величины. Мы обнаружили, что нужная нам связь – линейная, то есть имеет вид $t_{Ki}=a\cdot t_0+b\cdot t_{Hi}$. Для двух заданных случаев это соотношение дает

$$\begin{cases} t_{K1}=a\cdot t_0+b\cdot t_{H1} \\ t_{K2}=a\cdot t_0+b\cdot t_{H2} \end{cases} \Rightarrow b=\frac{t_{K2}-t_{K1}}{t_{H2}-t_{H1}}=0{,}7.$$

Тогда $t_{K3}-t_{K2}=b\cdot(t_{H3}-t_{H2})=\dfrac{t_{K2}-t_{K1}}{t_{H2}-t_{H1}}(t_{H3}-t_{H2})$. Следовательно, в третьем случае $t_{K3}=t_{K2}+\dfrac{t_{K2}-t_{K1}}{t_{H2}-t_{H1}}(t_{H3}-t_{H2})=34{,}1°\text{C}$.

Ответ: $t_{K3}=t_{K2}+\dfrac{t_{K2}-t_{K1}}{t_{H2}-t_{H1}}(t_{H3}-t_{H2})=34{,}1°\text{C}$.

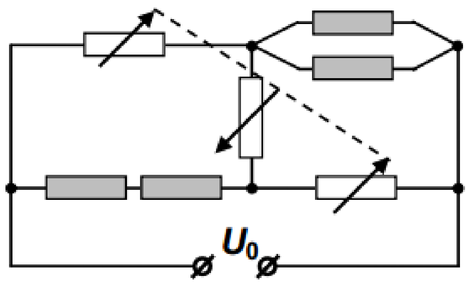
Критерии проверки:

Указано (используется в решении), что количества теплоты, за одно и то же время передаваемые от воды к металлу бруска и от него к окружающему воздуху, одинаковы	**2**
Для расчета количества теплоты, передаваемого от воды к металлу бруска, используется средняя температура воды	**2**
Показано, что связь t_K с t_H и t_0 – линейная	**4**
Найден нужный коэффициент линейной зависимости	**2**
Записано правильное выражение для t_{K3}	**2**
Получен правильный численный ответ для t_{K3}	**3**
ВСЕГО	**15**

Задание 3:

Вопрос: В схеме из задачи сопротивления всех нагревательных элементов одинаково и равно R. Сопротивление крайних реостатов всегда одинаково. Чему оно должно быть равно, чтобы сила тока в среднем реостате равнялась нулю?

Задача: В схеме, показанной на рисунке, использованы четыре одинаковых нагревателя и три реостата,



сопротивления которых связаны: у крайних реостатов они всегда равны и растут одинаково при повороте управляющего рычажка, а у среднего оно отличается и убывает при том же повороте. При «среднем» положении этого рычажка мощность, потребляемая парой параллельно соединенных нагревателей, равна $P_0=100$Вт, а потребляемая парой последовательно соединенных – $P_0'=196$Вт. Затем рычажок повернули, и мощности изменились: они стали равны $P_1=121$Вт и $P_1'=256$Вт. Потом его повернули еще раз, увеличив сопротивление каждого из крайних реостатов на ту же величину, что и при первом повороте. Теперь оказалось, что $P_2=144$Вт. Найдите P_2'.

Ответ на вопрос: При нулевой силе тока в среднем реостате сила тока в «верхнем» реостате I_1 равна силе тока через пару параллельно соединенных нагревательных элементов, а сила тока в «нижнем» реостате I_2 равна силе тока через пару последовательно соединенных нагревательных элементов. Кроме того, тогда напряжение на среднем реостате равно нулю, и напряжение на «верхнем» реостате U_1 равно напряжению на паре последовательно соединенных нагревательных элементов, а напряжение на «нижнем» реостате U_2 – напряжению на паре параллельно соединенных нагревательных элементов. Значит, сопротивление крайних реостатов удовлетворяют соотношению «баланса моста»: $\tilde{R}^2=\dfrac{U_1}{I_1}\dfrac{U_2}{I_2}=\dfrac{U_1}{I_2}\dfrac{U_2}{I_1}=2R\cdot\dfrac{R}{2}=R^2$. Значит, для отсутствия тока в

среднем реостате нужно, чтобы сопротивления крайних реостатов равнялись сопротивлению одного нагревательного элемента R.
Примечание: Можно использовать условие баланса моста без доказательства.

Критерии проверки:

Используется правильная связь величин сил токов в участках на одном «берегу» моста	**1+1=2**
Используется правильная связь величин напряжений по разные стороны от моста	**1+1=2**
Записано условие баланса моста*	**3**
Получен правильный ответ	**3**
ВСЕГО	**10**

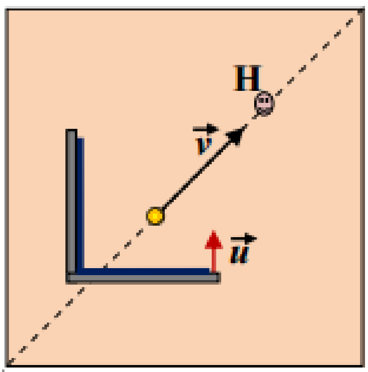
Решение задачи: Обозначим R – сопротивление каждого из нагревателей, $x{\cdot}R$ – сопротивление одного из «крайних» реостатов при исходном положении управляющего рычажка, а $\Delta R \equiv \Delta x{\cdot}R$ – изменение сопротивления этих реостатов при каждом переключении. Тогда, вычисляя сумму напряжений по «верхнему берегу» нашего моста, получаем: $I_1 xR + I\frac{R}{2} = U_0$ (I – сила тока через пару параллельно соединенных нагревателей). Аналогично для «нижнего берега» запишем (I' – сила тока через пару последовательно соединенных нагревателей): $I'2R + I_2 xR = U_0$. Из этих соотношений находим связь сил токов: $\frac{2}{x}I' - \frac{1}{2x}I = I_1 - I_2$. Еще одну связь получаем из условия непрерывности общего тока $I_1 + I' = I_2 + I \Rightarrow I - I' = I_1 - I_2$. Комбинируя эти уравнения, обнаруживаем, что отношение сил токов через пары нагревателей зависит только от отношения сопротивления крайних реостатов и нагревателей: $\frac{I'}{I} = \frac{2x+1}{2(x+2)}$. Отношение мощностей потребления $\frac{P'}{P} = \frac{I'^2 \cdot 2R}{I^2 \cdot (R/2)} = \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2$. Из данных для исходного положения рычажка: $\frac{2x+1}{x+2} = \sqrt{\frac{P_0'}{P_0}} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = 3$. После первого поворота рычажка $\frac{2(x+\Delta x)+1}{x+\Delta x+2} = \sqrt{\frac{P_1'}{P_1}} = \frac{16}{11} \Rightarrow x+\Delta x = 3{,}5 \Rightarrow \Delta x = 0{,}5$. Значит, после второго поворота рычажка $\frac{P_2'}{P_2} = \left(\frac{2x+4\Delta x+1}{x+2\Delta x+2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, и $P_2{}' = \frac{9}{4}P_2 = 324$Вт.

Ответ: $P_2{}' = \frac{9}{4}P_2 = 324$Вт.

Критерии проверки:

Правильно записано уравнение баланса напряжений для двух «берегов» моста	**3**
Правильно записано уравнение непрерывности тока	**3**
Получено правильная связь сил токов, текущих через нагреватели	**4**
Получено правильная связь мощностей тепловыделения в парах нагревателей	**3**
Получен правильный численный ответ	**2**
ВСЕГО	**15**

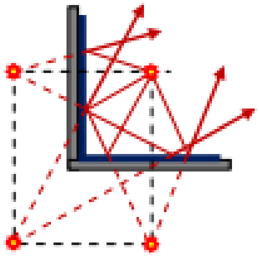
Задание 4:



Вопрос: Какое максимальное количество своих изображений можно увидеть (хотя бы частично) в двугранном зеркале, плоские грани которого перпендикулярны друг другу?
Задача: По диагонали квадратного поля движется со скоростью $v = \sqrt{2}$ м/с $\approx 1{,}414$м/с небольшой робот с яркой лампочкой. Вслед за ним движется на подставке с роликами двугранное зеркало, у которого обе зеркальные поверхности параллельны сторонам поля, и его скорость $u = 0{,}5$м/с тоже параллельна одной из его сторон (см. рисунок). Неподвижный наблюдатель Н расположен так, что он видит

максимально возможное количество изображений лампочки робота. Определите величины и направления скоростей всех этих изображений относительно наблюдателя.

Ответ на вопрос: Рассмотри некоторое положение светящейся точки. Если луч, упавший от этой точки на грань двугранного зеркала, после отражения «не задевает» вторую грань, то он вместе с другими такими же лучами кажется наблюдателю выходящим из своего изображения в этой грани, расположенного симметрично точке относительно плоскости этой зеркальной грани. Таким образом, две грани создадут два разных изображения светящейся точки. Кроме того, как видно из



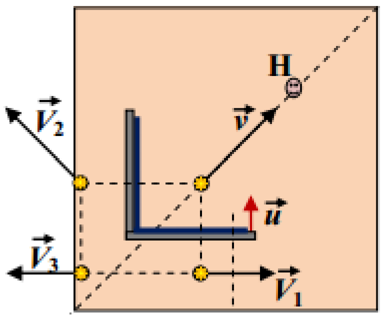
построения, лучи, которые после первого отражения падают на другую грань и испытывают второе отражение, кажутся выходящими из точки, симметричной первому изображению относительно второй грани. При этом независимо от порядка отражений от граней это одно и то же изображение. Таким образом, всего двугранное зеркало создает три изображения светящейся точки, которые вместе с самой точкой находятся в вершинах прямоугольника, стороны которого параллельны граням зеркало. Чтобы увидеть каждое из изображений, глаз наблюдателя должен находиться в точке, в которой отрезок, соединяющий его с этим изображением, пересекает поверхность зеркала, создающего это изображение. Снова обратив внимание на построение, убеждаемся, что существуют точки, для которых это условие выполнено по отношению ко всем трем изображениям. Значит, максимальное количество наблюдаемых изображений – три (хотя вовсе не обязательно, что все три изображения будут видны целиком).

Критерии проверки:

Указано, что каждая из плоских граней зеркала создает одно изображение светящейся точки	**2+2=4**
Указано на существование третьего изображения благодаря «двойным» отражениям	**3**
Сформулировано условие видимости изображения для наблюдателя	**1**
Дан правильный ответ	**2**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Перейдем в Систему Отсчета, связанную с зеркалом. В этой СО скорость лампочки $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$. Ее проекции на оси x (направленную «вправо» по рисунку параллельно грани зеркала) и y («вверх» параллельно второй грани) равны $v'_x = \frac{v}{\sqrt{2}} = 1$ м/с и $v'_y = \frac{v}{\sqrt{2}} - u = 0{,}5$ м/с.

Нетрудно заметить, что при одном отражении в неподвижном плоском зеркале параллельная зеркалу компонента скорости источника сохраняется, а перпендикулярная – меняет знак. Значит, компоненты скоростей трех изображений относительно зеркала равны:



$V'_{1x} = \frac{v}{\sqrt{2}}$ и $V'_{1y} = u - \frac{v}{\sqrt{2}}$, $V'_{2x} = -\frac{v}{\sqrt{2}}$ и $V'_{2y} = \frac{v}{\sqrt{2}} - u$, $V'_{3x} = -\frac{v}{\sqrt{2}}$ и $V'_{3y} = u - \frac{v}{\sqrt{2}}$. Для возвращения в неподвижную СО нужно к каждой из скоростей добавить $\vec{u}$. Значит: $V_{1x} = \frac{v}{\sqrt{2}}$ и $V_{1y} = 2u - \frac{v}{\sqrt{2}} = 0$, $V_{2x} = -\frac{v}{\sqrt{2}}$ и $V_{2y} = \frac{v}{\sqrt{2}}$, $V_{3x} = -\frac{v}{\sqrt{2}}$ и $V_{3y} = 2u - \frac{v}{\sqrt{2}} = 0$. Теперь легко находим величины скоростей: $V_1 = \frac{v}{\sqrt{2}} = 1$ м/с, $V_2 = v = \sqrt{2}$ м/с $\approx 1{,}414$ м/с и $V_3 = \frac{v}{\sqrt{2}} = 1$ м/с.

Направления указаны на рисунке.

Ответ: $V_1 = \frac{v}{\sqrt{2}} = 1$ м/с, $V_2 = v = \sqrt{2}$ м/с $\approx 1{,}414$ м/с и $V_3 = \frac{v}{\sqrt{2}} = 1$ м/с.

Критерии проверки:

Используется переход в СО, связанную с зеркалом	**2**
В этой СО правильно найдены компоненты скоростей всех изображений	**1+1+1=3**
Правильно описан переход в СО, связанную с наблюдателем	**1**
Правильно найдены компоненты скоростей всех изображений в этой СО	**1+1+1=3**
Получены правильные численные ответы	**2+2+2=6**
ВСЕГО	**15**