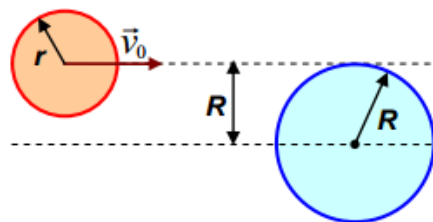


Задание 1:

Вопрос: Две гладкие цилиндрические шайбы, двигавшиеся поступательно, сталкиваются. При выполнении какого условия после удара они тоже движутся поступательно? Ответ объяснить.

Задача: На гладкой горизонтальной поверхности покоилась гладкая однородная цилиндрическая шайба массой $M = 700$ г с радиусом $R = 6$ см. Еще одна гладкая однородная цилиндрическая шайба такой же высоты (но с массой $m = 100$ г и радиусом $r = 4$ см) скользила, не вращаясь, по этой поверхности со скоростью $v_0 = 2,5$ м/с, причем ее центр двигался по прямой, касающейся поверхности покоящейся шайбы (см. рисунок). Произошел упругий удар. Найдите величины скоростей шайб после удара.

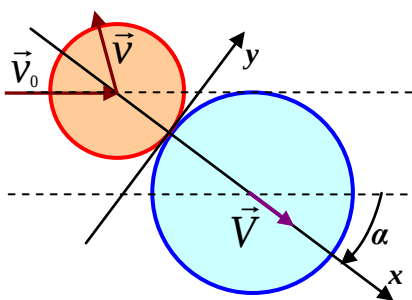


Ответ на вопрос: Для того, чтобы тела не изменили состояния вращения при ударе, момент действующих на них в процессе удара сил относительно центра масс каждого тела должен быть равен нулю. Таким образом, линия удара (линия, вдоль которой будут направлены силы взаимодействия при ударе) должна проходить через центры масс обеих шайб. Поскольку шайбы гладкие и цилиндрические, линия удара будет идти перпендикулярно поверхности соприкосновения, то есть она пройдет через точку соприкосновения шайб и геометрические центры обеих шайб. Значит, шайбы не начнут вращаться, если их центры масс окажутся на этой же прямой. Например, это условие будет выполнено, если шайбы однородные, так как тогда их центры масс совпадают с их геометрическими центрами.

Критерии проверки:

Указано на необходимость равенства нулю момента сил взаимодействия относительно ЦМ шайб	4
Указано, что для этого линия удара должна проходить через эти ЦМ (или указано другое эквивалентное геометрическое условие для направления сил взаимодействия)	2
Указано, что для гладких цилиндрических шайб линия удара проходит через их геометрические центры	3
Приведен пример с однородными шайбами	1
ВСЕГО	10

Решение задачи: Так как силы трения между шайбами нет, то покоящаяся шайба начнет двигаться по линии удара, которая совпадает с прямой, проходящей через центры шайб в момент соударения. Удобно анализировать соударение в системе координат, в которой эта линия выбрана как ось x , а



ось y – перпендикуляр к ней (как показано на рисунке). Обозначим α угол между линией удара и направлением начального движения шайбы. Из геометрического анализа видно, что $\sin \alpha = \frac{R}{R+r} = \frac{3}{5}$. Так как силы, действующие на шайбы, направлены вдоль оси x , то проекции скоростей шайб на ось y не изменяются, то есть $V_y = 0$ и $v_y = v_0 \sin \alpha = \frac{3}{5} v_0$.

Задача для x -компонент скоростей полностью аналогична «стандартной» задаче о лобовом упругом соударении:

$$\left\{ \begin{array}{l} m v_0 \cos \alpha = m v_x + M V_x \\ \frac{m (v_0 \cos \alpha)^2}{2} = \frac{m v_x^2}{2} + \frac{M V_x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{m-M}{m+M} v_0 \cos \alpha = -\frac{3}{5} v_0 \\ V_x = \frac{2m}{m+M} v_0 \cos \alpha = \frac{1}{5} v_0 \end{array} \right.$$

(здесь учтено, что $\cos \alpha = \frac{4}{5}$). Таким образом, $V = \frac{1}{5} v_0 = 0,5$ м/с, а $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{3\sqrt{2}}{5} v_0 \approx 2,12$ м/с.

Ответ: Конечная скорость большей шайбы $V = \frac{1}{5}v_0 = 0,5 \text{ м/с}$, а меньшей $v = \frac{3\sqrt{2}}{5}v_0 \approx 2,12 \text{ м/с}$.

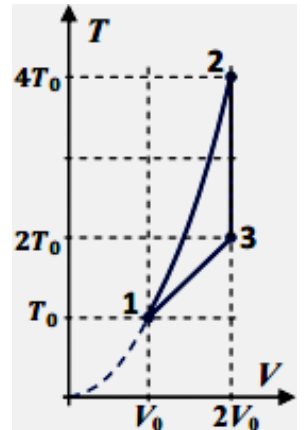
Критерии проверки:

Правильно записаны два независимых уравнения ЗСИ	2+2=4
Правильно записано уравнение ЗСЭ	3
Установлено (используется в решении), что большая шайба движется вдоль линии удара	1
Получены правильные выражения для двух компонент скорости меньшей шайбы	1+1=2
Получено правильное выражение для скорости большей шайбы	1
Получен правильный численный ответ для скорости большей шайбы	2
Получен правильный численный ответ для скорости меньшей шайбы	2
ВСЕГО	15

Задание 2:

Вопрос: При изобарном сжатии от постоянного количества одноатомного идеального газа было отведено количество теплоты, равное 750 Дж. Какая работа была совершена над газом в этом процессе? Ответ обосновать.

Задача: Рабочим телом тепловой машины является постоянное количество одноатомного идеального газа. Цикл рабочего тела на графике в координатах температура-объем показан на рисунке. Диаграмма процесса 1-2 – это участок параболы с вершиной в начале координат, диаграммы двух других процессов – отрезки прямых. Определите количество теплоты, получаемое газом за цикл от нагревателя, и найдите КПД цикла.



Ответ на вопрос: Внутренняя энергия одноатомного идеального газа,

выраженная через его давление и объем, равна $U = \frac{3}{2}pV$. По I Началу термодинамики

$Q = A + \Delta U$, где A – работа газа. При изобарном сжатии $A = p \cdot \Delta V$, и $Q = p \cdot \Delta V + \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{5}{2}p\Delta V = \frac{5}{2}A$. Работа над газом $A' = -A = -\frac{2}{5}Q = +300 \text{ Дж}$.

Критерии проверки:

Используется правильное выражение для внутренней энергии одноатомного идеального газа	2
Используется правильное выражение для работы в изобарном процессе	2
Получена правильная связь работы и количества теплоты в изобарном процессе	4
Получен правильный численный ответ*	2
ВСЕГО	10

*при неправильном знаке – минус 1 балл.

Решение задачи: Ясно, что газ получает тепло в процессе 1-2 (температура и объем растут), а отдает в процессах изохорного (2-3) и изобарного (3-1) охлаждения. То, что участок 3-1 – изобара, определяется по тому, что идущая вдоль него прямая очевидно проходит через начало координат, то есть в этом процессе объем пропорционален абсолютной температуре при постоянном количестве вещества.

В изохорном процессе 2-3 $A_{23} = 0$, $Q_{23} = \Delta U = \frac{3}{2}\nu R \cdot (T_3 - T_2) = -3\nu RT_0$. В изобарном процессе 3-1

молярная теплоемкость одноатомного идеального газа $c_p = \frac{5}{2}R$, и $Q_{31} = \frac{5}{2}\nu R \cdot (T_1 - T_3) = -\frac{5}{2}\nu RT_0$.

Значит, $Q_x = -Q_{23} - Q_{31} = \frac{11}{2}\nu RT_0$. В процессе 1-2, согласно условию, температура растет пропорционально квадрату объема: $T = \alpha V^2$. С учетом уравнения Менделеева-Клапейрона

$pV = \nu RT = \nu R\alpha V^2 \Rightarrow p(V) = \nu R\alpha V \equiv kV$. Значит, давление растет прямо пропорционально

объему. Работа газа в таком процессе $A_{12} = \frac{kV_2 + kV_1}{2}(V_2 - V_1) = \frac{k}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\nu R}{2}(T_2 - T_1)$. Поэтому

количество теплоты нагревателя

$$Q_H = A_{12} + \Delta U_{12} = \frac{\nu R}{2}(T_2 - T_1) + \frac{3\nu R}{2}(T_2 - T_1) = 2\nu R \cdot (T_2 - T_1) = 6\nu R T_0.$$

В результате КПД цикла $\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = \frac{1}{12} \approx 8,3\%$.

Ответ: Количество теплоты нагревателя $Q_H = 6\nu R T_0$, КПД цикла $\eta = \frac{1}{12} \approx 8,3\%$.

Критерии проверки:

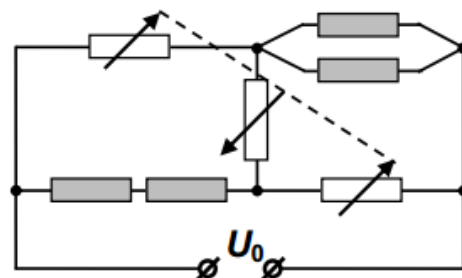
Правильно определены все три процесса ИЛИ Диаграммы всех трех процессов правильно построены в координатах давление-объем	2+2+2=6
Для всех процессов правильно указано направление теплообмена	1+1+1=3
Правильно найдена работа газа в цикле ИЛИ Правильно найдено количество теплоты, отдаваемое холодильнику	2
Получено правильное выражение для количество теплоты нагревателя	2
Получен правильный численный ответ для КПД	2
ВСЕГО	15

Задание 3:

Вопрос: В схеме из задачи сопротивления всех нагревательных элементов одинаково и равно R . Сопротивление крайних реостатов всегда одинаково. Чему оно должно быть равно, чтобы сила тока в среднем реостате равнялась нулю?

Задача: В схеме, показанной на рисунке, использованы четыре одинаковых нагревателя и три реостата,

сопротивления которых связаны: у крайних реостатов они всегда равны и растут одинаково при повороте управляющего рычажка, а у среднего оно отличается и убывает при том же повороте. При «среднем» положении этого рычажка мощность, потребляемая парой параллельно соединенных нагревателей, равна $P_0 = 100\text{Вт}$, а потребляемая парой последовательно соединенных – $P'_0 = 196\text{Вт}$. Затем рычажок повернули, и мощности изменились: они стали равны $P_1 = 121\text{Вт}$ и $P'_1 = 256\text{Вт}$. Потом его повернули еще раз, увеличив сопротивление каждого из крайних реостатов на ту же величину, что и при первом повороте. Теперь оказалось, что $P_2 = 144\text{Вт}$. Найдите P'_2 .



Ответ на вопрос: При нулевой силе тока в среднем реостате сила тока в «верхнем» реостате I_1 равна силе тока через пару параллельно соединенных нагревательных элементов, а сила тока в «нижнем» реостате I_2 равна силе тока через пару последовательно соединенных нагревательных элементов. Кроме того, тогда напряжение на среднем реостате равно нулю, и напряжение на «верхнем» реостате U_1 равно напряжению на паре последовательно соединенных нагревательных элементов, а напряжение на «нижнем» реостате U_2 – напряжению на паре параллельно соединенных нагревательных элементов. Значит, сопротивления крайних реостатов удовлетворяют соотношению «баланса моста»: $\tilde{R}^2 = \frac{U_1}{I_1} \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_2} \frac{U_2}{I_1} = 2R \cdot \frac{R}{2} = R^2$. Значит, для отсутствия тока в среднем реостате нужно, чтобы сопротивления крайних реостатов равнялись сопротивлению одного нагревательного элемента R .

Примечание: Можно использовать условие баланса моста без доказательства.

Критерии проверки:

Используется правильная связь величин сил токов в участках на одном «берегу» моста	1+1=2
Используется правильная связь величин напряжений по разные стороны от моста	1+1=2
Записано условие баланса моста*	3
Получен правильный ответ	3

*если условие баланса моста используется как известный результат, за него начисляются все 7 баллов полностью

Решение задачи: Обозначим R – сопротивление каждого из нагревателей, $x \cdot R$ – сопротивление одного из «крайних» реостатов при исходном положении управляющего рычажка, а $\Delta R \equiv \Delta x \cdot R$ – изменение сопротивления этих реостатов при каждом переключении. Тогда, вычисляя сумму напряжений по «верхнему берегу» нашего моста, получаем: $I_1 x R + I \frac{R}{2} = U_0$ (I – сила тока через пару параллельно соединенных нагревателей). Аналогично для «нижнего берега» запишем (I' – сила тока через пару последовательно соединенных нагревателей): $I' 2R + I_2 x R = U_0$. Из этих соотношений находим связь сил токов: $\frac{2}{x} I' - \frac{1}{2x} I = I_1 - I_2$. Еще одну связь получаем из условия непрерывности общего тока $I_1 + I' = I_2 + I \Rightarrow I - I' = I_1 - I_2$. Комбинируя эти уравнения, обнаруживаем, что отношение сил токов через пары нагревателей зависит только от отношения сопротивления крайних реостатов и нагревателей: $\frac{I'}{I} = \frac{2x+1}{2(x+2)}$. Отношение мощностей

потребления $\frac{P'}{P} = \frac{I'^2 \cdot 2R}{I^2 \cdot (R/2)} = \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2$. Из данных для исходного положения рычажка:

$$\frac{2x+1}{x+2} = \sqrt{\frac{P'_0}{P_0}} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = 3. \quad \text{После} \quad \text{первого} \quad \text{поворота} \quad \text{рычажка}$$

$$\frac{2(x+\Delta x)+1}{x+\Delta x+2} = \sqrt{\frac{P'_1}{P_1}} = \frac{16}{11} \Rightarrow x+\Delta x = 3,5 \Rightarrow \Delta x = 0,5. \quad \text{Значит, после второго поворота рычажка}$$

$$\frac{P'_2}{P_2} = \left(\frac{2x+4\Delta x+1}{x+2\Delta x+2} \right)^2 = \frac{9}{4}, \text{ и } P'_2 = \frac{9}{4} P_2 = 324 \text{ Вт.}$$

$$\text{Ответ: } P'_2 = \frac{9}{4} P_2 = 324 \text{ Вт.}$$

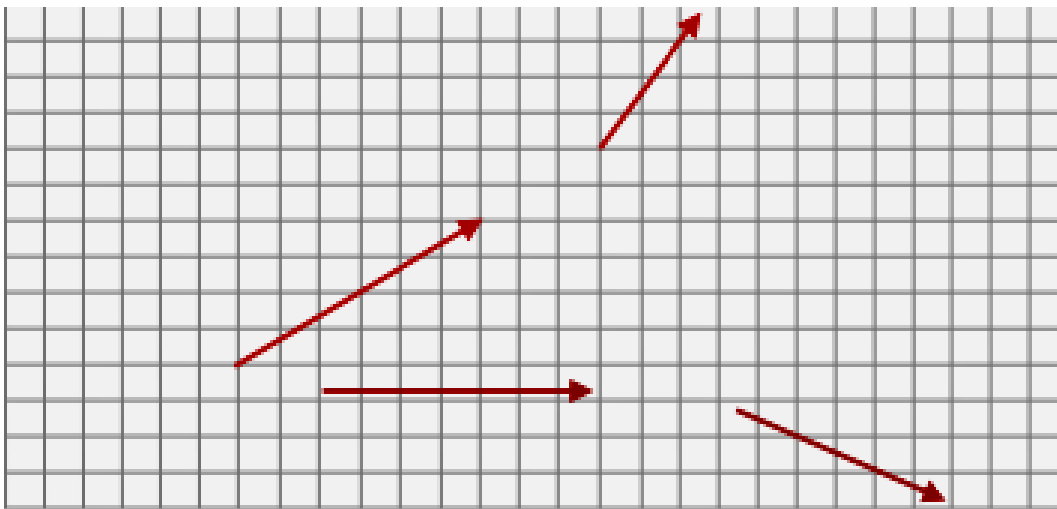
Критерии проверки:

Правильно записано уравнение баланса напряжений для двух «берегов» моста	3
Правильно записано уравнение непрерывности тока	3
Получена правильная связь сил токов, текущих через нагреватели	4
Получена правильная связь мощностей тепловыделения в парах нагревателей	3
Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО	15

Задание 4:

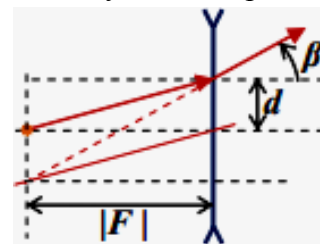
Вопрос: Точечный источник света поместили в главный фокус тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = -120$ см. Под каким углом к ее главной оптической оси будет направлен после прохождения линзы луч от этого источника, упавший на линзу в точке на расстоянии $d = 21$ мм от этой оси?

Задача: На бумаге в клетку частично изображено построение хода лучей через тонкую линзу. При этом сама линза и ее характерные точки отсутствуют: сохранилось только изображение участков двух лучей – до и после преломления в линзе. Восстановите положение главной оптической оси линзы и найдите ее оптическую силу. Длина стороны клетки равна 5 мм.



Подсказка: оптический центр линзы и ее главные фокусы находятся в узлах «сетки».

Ответ на вопрос: Для построения преломленного луча для заданного падающего нужно построить параллельный падающему вспомогательный луч, проходящий через оптический центр линзы. В случае рассеивающей линзы продолжение преломленного луча должно пересекаться с вспомогательным в фокальной плоскости линзы (см. рисунок).



Тогда угол отклонения преломленного луча от ГОО линзы находится из соотношения $\operatorname{tg}(\beta) = \frac{2d}{|F|} = 0,035$. С

учетом малости этой величины $\beta \approx 0,035 \text{ рад} \approx 2^\circ$.

Критерии проверки:

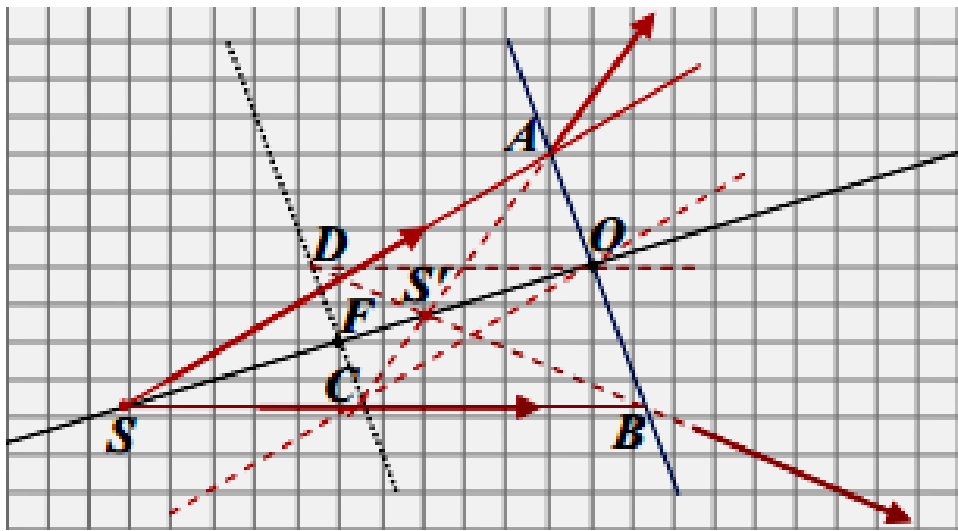
Указано на возможность построения вспомогательного луча, проходящего через оптический центр линзы	2
Правильно и полностью описано построение преломленного луча	2
Явно приведено построение преломленного луча	2
Получен правильный ответ для величины тангенса угла	3
Получен правильный ответ для величины угла с учетом его малости	1
ВСЕГО	10

Решение задачи: Имеющиеся на рисунке отрезки лучей должны находиться по разные стороны от линзы (по условию) и, кроме того, луч, падающий на тонкую линзу, и луч, преломленный в ней, должны пересекаться в плоскости линзы. Нетрудно заметить, что возможен только один способ выбора пар падающий–преломленный луч, при котором точки пересечения задают положение плоскости линзы вдоль прямой AB (при другом выборе плоскость линзы пересекала бы падающие лучи). По характеру преломления лучей ясно, что эта линза – рассеивающая.

Продолжив до пересечения падающие лучи (точка S) и преломленные лучи (точка S') находим пару точек, в котором одна является изображением другой. Ясно, что соединяющая их прямая должна проходить через оптический центр линзы, поэтому центр расположен в точке O , в которой пересекаются прямые AB и SS' . Главная оптическая ось линзы проходит через O перпендикулярно AB , причем оказывается, что SS' как раз и является этим перпендикуляром. Итак, ГОО линзы – это SS' .

Если провести через точку O луч, параллельный любому из падающих лучей (пунктирные линии на рисунке), то он должен пересечься с продолжением преломленного луча в фокальной плоскости линзы (точки C и D – см. ответ на вопрос). Поэтому главный фокус линзы находится как пересечение CD и SS' – это точка F . Можно также найти одну из точек (C или D), и опустить перпендикуляр на SS' , но по двум точкам построение точнее. Практически неизбежные при построениях вручную мелкие неточности при нахождении O и F можно скорректировать благодаря информации, что они находятся в узлах сетки. Расстояние между ними тоже считается «по клеточкам» 2 клетки «по вертикали» и 6 клеток «по горизонтали» дают для модуля фокусного расстояния линзы $|F| = 5 \text{ мм} \cdot \sqrt{4+36} \approx 31,62 \text{ мм}$. Значит, оптическая сила линзы

$$D = -\frac{1}{|F|} \approx -31,62 \text{ Дптр}.$$



Ответ: См. построение: ГОО линзы – это SS' , $D = -\frac{1}{|F|} = -10\sqrt{10}$ Дптр $\approx -31,62$ Дптр.

Критерии проверки:

Правильно выбраны пары падающий–преломленный луч	1
Указано (используется в решении), что лучи каждой пары должны пересекаться в плоскости линзы	2
Правильно найдено положение плоскости линзы	3
Правильно найдено положение ГОО линзы	2
Правильно найдено положение оптического центра линзы	2
Правильно найдено положение фокуса линзы	3
Получен правильный численный ответ для D	2
ВСЕГО	15