

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «Робофест» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2018 года, ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР
БИЛЕТ № 06 (7-9 классы): возможные решения и критерии**

Критерии оценивания (в технических баллах):

Для вопросов:

Есть отдельные правильные соображения – **1 балл.**

Ответ в целом правилен, но содержит существенные неточности, или существенно неполон, или отсутствует обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **2 балла.**

Ответ правилен, но присутствуют мелкие неточности, или ответ недостаточно полон, или отсутствует достаточное обоснование (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **3 балла.**

Ответ полностью правильный, но недостаточно обоснованный (для вопросов, в которых необходимо обоснование) – **4 балла.**

Правильный, полный и обоснованный ответ – **5 баллов (максимальная оценка).**

Для задач:

Есть отдельные правильные соображения – **1-2 балла.**

Есть часть необходимых для решения соображений, решение не закончено или содержит серьезные ошибки – **3-4 балла.**

Присутствует большая часть необходимых для решения соображений, правильно записана часть необходимых соотношений, решение не закончено или содержит ошибки – **5-7 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны почти все необходимые для решения исходные уравнения, но решение не закончено или содержит ошибки – **8-10 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит ошибки – **11-14 баллов.**

Присутствуют все необходимые для решения соображения, правильно записаны все необходимые для решения исходные уравнения, решение выстроено правильно с физической и логической точки зрения, но содержит одну-две мелкие неточности, не позволившие получить правильный ответ, или правильное решение с недостаточным обоснованием существенных использованных результатов – **15-17 баллов.**

Правильное обоснованное решение с верным аналитическим ответом, но мелкой неточностью при получении численного ответа, либо правильное решение с правильными ответами с недостаточным обоснованием одного из использованных результатов (из числа не ключевых для решения, но необходимых) – **18-19 баллов.**

Полное, правильное, обоснованное решение с правильными ответами – **20 баллов (максимальная оценка).**

МАКСИМАЛЬНАЯ СУММА ЗА РАБОТУ: 100 технических баллов.

ИТОГОВАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ приводится к 50-балльной шкале.

Задание 1:

Вопрос: У небольшой обтекаемой модели автомобиля сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости. Ее аэродинамический профиль нейтрален (то есть при движении обтекающий поток воздуха не создает ни прижимной, ни подъемной силы), а двигатель имеет постоянную мощность. После первого разгона шины заменили на такие же по форме и размерам, но с большим коэффициентом трения, и максимальная достижимая скорость модели $v_{\max}$ возросла. Затем поставили шины с еще большим коэффициентом трения, но $v_{\max}$ осталась прежней. Объясните такое поведение $v_{\max}$.

Задача: Робот с нейтральным аэродинамическим профилем разгоняется из состояния покоя по прямой на горизонтальной поверхности. При этом его максимальное ускорение оказывается равным $a_{\max} = 0,32 \text{ м/с}^2$, а максимальная скорость, достигнутая за достаточно большое время, $v_{\max} = 1,5 \text{ м/с}$.

На робота установили антикрыло. После этого максимальная скорость робота увеличилась до $\tilde{v}_{\max} = 3 \text{ м/с}$. Найти максимальное ускорение робота в процессе разгона после установки антикрыла. Считать, что величина силы сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости робота (он существенно больше по размерам, чем модель из предыдущего задания), а величина создаваемой антикрылом прижимающей силы – пропорциональна скорости. Мощность двигателя робота достаточно велика, чтобы колеса при $v = v_{\max}$ чуть-чуть проскальзывали.

Ответ на вопрос: Максимальная скорость достигается в тот момент, когда сила трения ведущих колес (которая как раз и разгоняет автомобиль) уравнивается силой сопротивления воздуха:

$F_{\text{тр}} = F_c = \alpha \cdot v_{\max}$. При этом сила трения не превышает $F_{\text{тр}}^{\max} = \mu N$. Таким образом, если колеса проскальзывают, то максимальная скорость растет пропорционально коэффициенту трения:

$v_{\max} = \frac{\mu N}{\alpha}$ (при нейтральном профиле сила N не зависит от скорости). В этом режиме часть мощности двигателя идет на компенсацию тепловых потерь при проскальзывании, то есть мощность

двигателя должна быть не меньше, чем расходуемая на разгон: $P \geq F_{\text{тр}} v_{\max} = \frac{\mu^2 N^2}{\alpha}$, и

соответственно $\mu \leq \frac{\sqrt{\alpha P}}{N}$. Если коэффициент трения станет больше $\frac{\sqrt{\alpha P}}{N}$, то скорость $v_{\max} = \frac{\mu N}{\alpha}$

станет недостижима – при меньшей скорости проскальзывание колес прекратится, и сила трения станет меньше $F_{\text{тр}} = \alpha v < \mu N$, и скорость перестанет зависеть от коэффициента трения:

$P = F_{\text{тр}} v = \alpha v^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{P}{\alpha}}$. Теперь можно объяснить наблюдаемое поведение скорости: для

первых шин значение коэффициента трения было меньше $\frac{\sqrt{\alpha P}}{N}$ (колеса проскальзывали), и поэтому

увеличение μ привело к увеличению максимальной скорости, а уже со вторыми шинами колеса не

проскальзывали (как и с третьими, выполнялось соотношение $\mu > \frac{\sqrt{\alpha P}}{N}$), и замена вторых шин на

третьи не изменила $v_{\max}$.

Решение задачи: В отсутствие антикрыла уравнение движения робота имеет вид $ma = \mu mg - \beta v^2$, где μ – коэффициент трения ведущих колес о поверхность, а сила сопротивления воздуха $|\vec{F}_c| = \beta v^2$. Поэтому максимальное ускорение достигается при нулевой скорости и равно $a_{\max} = \mu g$, а максимальная скорость – при $a = 0$ (когда сила трения

ведущих колес уравнивается силой сопротивления воздуха) и равна $v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu mg}{\beta}}$. С

учетом прижимной силы сила нормальной реакции дороги становится равной $N = mg + \gamma v$. Поэтому уравнение движения в режиме проскальзывания колес (ясно, что для обеспечения максимальной ускорения нам снова нужен именно такой режим)

$ma = \mu(mg + \gamma v) - \beta v^2 \Rightarrow a = \mu g + \mu \frac{\gamma}{m} v - \frac{\beta}{m} v^2$. Выделяя из этого выражения полный квадрат

$a(v) = \mu g + \frac{\mu^2 \gamma^2}{4m\beta} - \frac{\beta}{m} \left(v - \frac{\mu\gamma}{2\beta} \right)^2$, замечаем, что максимальное ускорение $\tilde{a}_m$ достигается при

$v_0 = \frac{\mu\gamma}{2\beta}$, и оно равно $\tilde{a}_m = \mu g + \frac{\mu^2 \gamma^2}{4m\beta}$. Следовательно, $\frac{\tilde{a}_m}{a_m} = 1 + \frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}$. Из этого

соотношения находим, что $\frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta} = \frac{\tilde{a}_m}{a_m} - 1$. Максимальная скорость по-прежнему достигается

при $a = 0$, то есть при $\mu g + \mu \frac{\gamma}{m} v - \frac{\beta}{m} v^2 = 0$. Решая это квадратное уравнение, обнаруживаем,

что $\tilde{v}_{\max} = \frac{\mu\gamma}{2\beta} + \sqrt{\frac{\mu^2 \gamma^2}{4\beta^2} + \frac{\mu mg}{\beta}}$. Таким образом,

$$\frac{\tilde{v}_{\max}}{v_{\max}} = \sqrt{1 + \frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}} + \sqrt{\frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}} = \sqrt{\frac{\tilde{a}_m}{a_m}} + \sqrt{\frac{\tilde{a}_m}{a_m} - 1}.$$

Решая это уравнение относительно $\frac{\tilde{a}_m}{a_m}$, получаем: $\frac{\tilde{a}_m}{a_m} = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}} \right)^2 = \frac{25}{16}$. Поэтому

$$\tilde{a}_m = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}} \right)^2 a_m = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \tilde{a}_m = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}} \right)^2 a_m = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

Задание 2:

Вопрос: Количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой вещества постоянного сечения, прямо пропорционален разности температур по разные стороны от него и обратно пропорционален толщине слоя. Допустим, что два слоя теплоизоляции изготовлены из одного материала, но внешний имеет в два раза меньшую толщину и в три раза большую площадь. Между слоями, внутри и снаружи – вещество, которое очень хорошо проводит тепло. Температура внутри равна $t_1 = 12^\circ\text{C}$, а снаружи $t_2 = 5^\circ\text{C}$. Какова температура вещества между слоями?

Задача: Собираясь на соревнования, школьник взял с собой упаковку бутербродов в сумке с теплоизолирующими стенками и с электронным датчиком внутренней и внешней температуры. Бутерброды он положил в сумку из холодильника, где рядом с ними стояла кружка с водой, в которой плавала маленькая льдинка (школьник вел за ней наблюдения по заданию учителя физики, но льдинка не росла). По показаниям датчика он определил, что за время сборов $\tau = 3$ минуты внутренняя температура возросла на $\Delta t = 0,3^\circ\text{C}$ при неизменной внешней температуре $t_0 = 25^\circ\text{C}$. Когда он пришел на соревнования, внутренняя температура равнялась $t_1 = 7^\circ\text{C}$, а внешняя – $t'_0 = 27^\circ\text{C}$. За какое время после этого внутренняя температура возрастет еще на $\Delta t' = 0,5^\circ\text{C}$, если внешняя температура меняться не будет?

Ответ на вопрос: Так как вещество между слоями «очень хорошо проводит тепло», то его температуру t можно считать почти постоянной. Рассмотрим установившийся режим. В нем поток тепла (количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой теплоизоляции) должен быть одинаков для обоих слоев (иначе температура вещества между слоями изменялась бы). Поэтому $(t_1 - t) \frac{S}{d} = (t - t_2) \frac{3S}{(d/2)}$,

откуда находим, что $t = \frac{t_1 + 6t_2}{7} = 6^\circ\text{C}$.

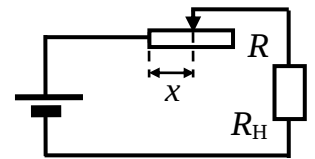
Решение задачи: Из условия ясно, что температура в холодильнике $t = 0^\circ\text{C}$. Поэтому скорость поступления тепла в сумку в первом случае была пропорциональна $t_0 - t = 25^\circ\text{C}$. На соревнованиях эта скорость была пропорциональна $t'_0 - t_1 = 20^\circ\text{C}$ с тем же коэффициентом пропорциональности. Для нагрева содержимого сумки на $\Delta t' = 0,5^\circ\text{C}$ нужно в $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{5}{3}$ раза больше тепла, чем для нагрева на $\Delta t = 0,3^\circ\text{C}$. Поэтому $\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \frac{t_0 - t}{t'_0 - t_1} = \frac{25}{12}$, то есть $\tau' = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \frac{t_0 - t}{t'_0 - t_1} \tau = 6 \frac{1}{4}$ мин.

ОТВЕТ: $\tau' = \frac{\Delta t' t_0 - t_1}{\Delta t t'_0 - t} \tau = 6 \text{ мин } 15 \text{ с.}$

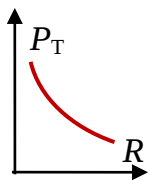
Задание 3:

Вопрос: Изобразите график зависимости мощности тепловых потерь в реостате от его сопротивления (при неизменном приложенном напряжении).

Задача: Постоянная (повышенная) температура датчика поддерживается с помощью нагревательного элемента, цепь питания которого показана на схеме (xR – сопротивление части реостата, включенной в цепь). При температуре внешней среды $t_1 = 25^\circ\text{C}$ положение движка реостата соответствует $x_1 = 0,75$, при $t_2 = 18^\circ\text{C}$ – $x_2 = 0,5$. Найдите x при температуре $t_3 = 9^\circ\text{C}$?



Ответ на вопрос: Поскольку, согласно закону Джоуля-Ленца, $P_T = U^2 / R$, то нужный график – это гипербола:



Решение задачи: При перемещении движка изменяется напряжение U_H , подаваемое на нагревательный элемент. Считая источник идеальным, и обозначая его ЭДС символом E , запишем:

$U_H = IR_H = \frac{E}{xR + R_H} R_H$. Введем обозначение $k \equiv \frac{R}{R_H}$. Тогда $U_H = \frac{E}{1 + k \cdot x}$. Затем заметим, что из

условия баланса тепловыделения нагревательного элемента и потерь на теплообмен с окружающей средой следует, что $\frac{U_H^2}{R(t_0)} = k \cdot (t_0 - t) \Rightarrow U_H^2 = \alpha R(t_0) \cdot (t_0 - t)$. Здесь α –

некоторая постоянная, t_0 – температура, необходимая для работы датчика, а $R(t_0)$ – сопротивление нагревательного элемента при этой температуре. Так как t_0 по условию

постоянна, то $\frac{U_2^2}{U_1^2} = \frac{t_0 - t_2}{t_0 - t_1} = 1 + \frac{t_1 - t_2}{t_0 - t_1}$ ($U_{1,2,3}$ – значения напряжения на нагревательном элементе при соответствующем положении движка реостата). Из этого соотношения выражаем

$t_0 - t_1 = \frac{U_1^2}{U_2^2 - U_1^2} (t_1 - t_2)$. По аналогичным соображениям $\frac{U_3^2}{U_1^2} = \frac{t_0 - t_3}{t_0 - t_1} = 1 + \frac{t_1 - t_3}{t_0 - t_1}$. Подставляя

сюда выражение для $t_0 - t_1$, получаем: $\frac{U_3^2}{U_1^2} = 1 + \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2} \frac{U_2^2 - U_1^2}{U_1^2}$. Теперь используем соотношения

$\frac{U_3}{U_1} = \frac{1 + k \cdot x_1}{1 + k \cdot x_3}$ и $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1 + k \cdot x_1}{1 + k \cdot x_2}$. В результате: $\frac{1 + k \cdot x_1}{1 + k \cdot x_3} = \sqrt{\frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2} \left(\frac{1 + k \cdot x_1}{1 + k \cdot x_2} \right)^2 - \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_2}}$. Из этого

уравнения выражается искомая величина:
$$x_3 = \frac{(1+k \cdot x_1)(1+k \cdot x_2)}{k \sqrt{\frac{t_1-t_3}{t_1-t_2}(1+k \cdot x_1)^2 - \frac{t_2-t_3}{t_1-t_2}(1+k \cdot x_2)^2}}, \text{ где}$$

$$k \equiv \frac{R}{R_H}. \text{ С учетом известных числовых значений: } x_3 = \frac{(2+1,5k)(2+k)\sqrt{7}}{k\sqrt{16(2+1,5k)^2 - 9(2+k)^2}}.$$

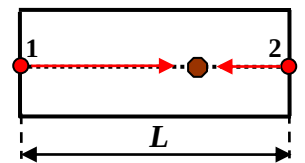
ОТВЕТ: $x_3 = \frac{(2+1,5k)(2+k)\sqrt{7}}{k\sqrt{16(2+1,5k)^2 - 9(2+k)^2}}, \text{ где } k \equiv \frac{R}{R_H}.$

Задание 4:

Вопрос: Ток фотодатчика пропорционален мощности света, попадающего на фотодатчик. В каком случае этот ток будет быстрее изменяться при изменении расстояния до источника света – (1) источник – маленькая лампа или (2) источник – плоская светящаяся панель больших размеров? Ответ объяснить.

Задача: Робот, оснащенный двумя фотодатчиками, перемещается по прямой на площадке длиной $L = 12$ м.

На границах его области движения установлены две маленькие лампочки, каждая из которых испускает свет равномерно по всем направлениям внутрь площадки. Ток каждого фотодатчика пропорционален мощности излучения, попадающего в его «окно». Логическая схема получает информацию о величине суммарного тока датчиков $I = I_1 + I_2$. В центре отрезка $I = 8$ мА. На каком



расстоянии от лампы 1 может находиться робот при $I = 19$ мА?

Ответ на вопрос: В случае (1) энергия, излучаемая лампой, на расстоянии r от нее распределяется практически равномерно по сфере радиуса r , и поэтому мощность света, попадающего на датчик, будет убывать обратно пропорционально r^2 . В случае (2) на расстояниях, много меньших размеров «большой» панели, площадь, по которой распределяется энергия излучения, почти не убывает, и поэтому мощность света будет изменяться очень медленно. Значит, ток датчика быстрее изменяется при изменении расстояния в случае (1).

Решение задачи: Обозначим расстояние от робота до лампы 1 r_1 . Тогда расстояние от него до лампы 2 равно $r_2 = L - r_1$. Удобно ввести «координату» x , отсчитываемую от центра отрезка движения в направлении лампы 1. Тогда $r_1 = \frac{L}{2} - x$ и $r_2 = \frac{L}{2} + x$. По условию ток каждого датчика пропорционален

мощности сигнала, а мощность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: $I_{1,2} = \frac{\alpha}{r_{1,2}^2}$

(α – некоторая постоянная величина). Поэтому суммарный ток

$$I = \alpha \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) = \alpha \left(\frac{4}{(L-2x)^2} + \frac{4}{(L+2x)^2} \right) = \alpha \frac{8(L^2 + 4x^2)}{(L^2 - 4x^2)^2}.$$

При нахождении робота в центре отрезка ($x = 0$) получаем $I_0 = \alpha \frac{8}{L^2}$. Таким образом,

$$\frac{I}{I_0} = \frac{L^2(L^2 + 4x^2)}{(L^2 - 4x^2)^2}. \text{ Из этого уравнения можно найти } x^2: x^2 = \frac{L^2}{8} \left(2 + \frac{I_0}{I} - \sqrt{8 \frac{I_0}{I} + \frac{I_0^2}{I^2}} \right). \text{ Для}$$

заданных значений ($I = 19$ мА и $I_0 = 8$ мА) получается $x^2 = \frac{L^2}{76} (23 - 8\sqrt{5}) \Rightarrow x = \pm L \sqrt{\frac{23 - 8\sqrt{5}}{76}}.$

Значит, расстояние до первой лампы может принимать два значения:

$$r_1 = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{23 - 8\sqrt{5}}{19}} \right) = 6 \left(1 - \sqrt{\frac{23 - 8\sqrt{5}}{19}} \right) \text{ м} \quad \text{и} \quad r_1' = \frac{L}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{23 - 8\sqrt{5}}{19}} \right) = 6 \left(1 + \sqrt{\frac{23 - 8\sqrt{5}}{19}} \right) \text{ м.} \quad \text{Если}$$

участник может оценить примерное значение $\sqrt{5}$, он может получить значения $r_1 \approx 2,9 \text{ м}$ и $r_1' \approx 9,1 \text{ м}$.

$$\text{ОТВЕТ: } r_1 = \frac{L}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{23 - 8\sqrt{5}}{19}} \right) = 6 \left(1 - \sqrt{\frac{23 - 8\sqrt{5}}{19}} \right) \text{ м} \quad \text{и} \quad r_1' = \frac{L}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{23 - 8\sqrt{5}}{19}} \right) = 6 \left(1 + \sqrt{\frac{23 - 8\sqrt{5}}{19}} \right) \text{ м}$$

(или $r_1 \approx 2,9 \text{ м}$ и $r_1' \approx 9,1 \text{ м}$). Допустима более грубая оценка.