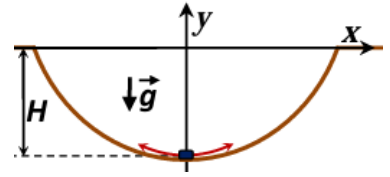


ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «Робофест» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2025 года, ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР
БИЛЕТ № 06 (11 классы), возможные решения и критерии

Задание 1: «Гармоничная форма»

Вопрос: Поверхность гладкой осесимметричной лунки в вертикальном сечении описывается формулой $y(x) = H \cdot \cos(x/H)$ (см. рисунок). По этой поверхности скользит маленькая шайба, совершающая малые гармонические колебания. Найдите их период. Ускорение свободного падения g .



Ответ на вопрос: При отклонении шайбы от положения равновесия ее возвращает назад горизонтальная составляющая силы нормальной реакции лунки, то есть уравнение движения шайбы в проекции на горизонтальную ось имеет вид $m \cdot a_x = -N \cdot \sin(\alpha)$, где α – угол отклонения силы нормальной реакции от вертикали. При малых отклонениях этот угол тоже мал, и поэтому в линейном по x (гармоническом) приближении $N \approx mg$, а $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) = y'_x(x) = \sin\left(\frac{x}{H}\right) \approx \frac{x}{H}$. Таким образом, уравнение движения для малых колебаний сводится к уравнению гармонических колебаний $x'' + \frac{g}{H} x = 0$ с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{g}{H}}$. Период этих колебаний $T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}$.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Правильно указана возвращающая сила, обеспечивающая колебания шайбы.	1
2	Правильно записано уравнение движения.	1
3	В уравнении малых колебаний использовано $N \approx mg$.	2
4	В уравнении малых колебаний использовано, что $\sin(\alpha) \approx x/H$.	3
5	Уравнение движения приведено к виду уравнения гармонических колебаний.	1
6	Получена правильная формула для периода.	2
Всего		10

Задача: У лунки с точно таким же профилем, как в вопросе, половина поверхности гладкая, а на половине коэффициент трения $\mu = 0,1$, причем граница раздела перпендикулярна плоскости движения шайбы. Шайбу отпускают без начальной скорости из положения на высоте $h = 0,005 \cdot H$ над нижней точкой лунки на гладкой ее половине, и она доезжает до этой нижней точки за время $t_0 = 0,6$ с. Через какое после прохождения нижней точки лунки шайба впервые остановится? Какой будет скорость шайбы спустя время t_0 после начала движения по шероховатой части лунки?

Решение задачи: Понятно, что на гладком участке шайба наберет скорость $v_0 = \sqrt{2gh} = 0,1 \cdot \sqrt{gH}$. Время ее движения от максимального отклонения до положения равновесия отвечает четверти

периода колебаний (в отсутствие трения) $t_0 = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{H}{g}}$. При описании движения на

шероховатой части поверхности лунки нужно учесть силу трения. Рассмотрим движение от «старта» шайбы на этом участке. В этом случае в уравнении малых колебаний по горизонтальной оси дополнительно появляется проекция силы трения скольжения $F_{\text{тр}x} = -\mu \cdot mg$. Следовательно,

уравнение колебаний теперь принимает вид $x'' + \frac{g}{H} x = -\mu g$. Если записать закон движения в виде

$x(t) = -\mu H + \tilde{x}(t)$, то для $\tilde{x}(t)$ мы получаем «обычное» уравнение гармонических колебаний

$\tilde{x}'' + \frac{g}{H} \tilde{x} = 0$. Значит, эту функцию можно записать как комбинацию гармонических функций

(синуса и косинуса), то есть $x(t) = -\mu H + A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$. Мы знаем, что при $t = 0$ $x(0) = 0$ и $v_x(0) = v_0 = 0,1 \cdot \sqrt{gH}$. Сравнивая эти значения с теми, что дает наш закон колебаний, определяем

коэффициенты: $-\mu H + A = 0 \Rightarrow A = \mu H = 0,1 \cdot H$ и $\omega B = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega} = 0,1 \cdot H$. Таким образом,

закон движения шайбы до первой остановки

$$x(t) = 0,1 \cdot H \cdot [-1 + \cos(\omega t) + \sin(\omega t)] \Rightarrow v_x(t) = 0,1 \cdot \sqrt{gH} [\cos(\omega t) - \sin(\omega t)].$$

Как видно, первая остановка отвечает $\cos(\omega t_1) = \sin(\omega t_1) \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{1}{2}t_0 = 0,3\text{ с}$.

После остановки шайба оказывается в точке с координатой $x_1 = 0,1 \cdot H(\sqrt{2} - 1) < 0,1 \cdot H$. Последнее неравенство означает, что в этой точке возвращающая сила меньше максимальной величины силы трения покоя, то есть шайба больше не придет в движение, и дальше ее скорость равна нулю, в том числе и спустя время t_0 после начала движения по шероховатой части лунки.

Ответ: $t_1 = \frac{1}{2}t_0 = 0,3\text{ с}$, $v_x(t_0) = 0$.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Правильно определена скорость шайбы после скатывания	2
2	Указано (используется в решении), что $t_0 = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{H}{g}}$	2
3	Записано уравнение движения по шероховатой части лунки с учетом силы трения скольжения.	2
4	Это уравнение приведено к виду $x_t'' + \frac{g}{H}x = -\mu g$ (или получено уравнение колебаний для скорости).	2
5	Правильно найдено решение записанного уравнения для $x(t)$ или $v_x(t)$	2
6	Получена правильная формула для t_1 .	2
7	Получено правильное численное значение для t_1 .	1
8	Указано, что после первой остановки шайба не будет двигаться.	1
9	Дан ответ $v_x(t_0) = 0$.	1
Всего		15

Задание 2: «Вот это трансформация!»

Вопрос: Тепловой насос – устройство, которое за счет совершения работы передает тепло от более холодного тела к более нагретому. Назовем коэффициентом трансформации K теплового насоса отношение количества теплоты, переданного к более нагретому телу к работе, произведенной над его рабочим телом. Как связаны между собой K теплового насоса и КПД тепловой машины с тем же циклом рабочего тела?

Ответ на вопрос: По определению КПД тепловой машины выражается через произведенную рабочим телом работу A и подведенного к рабочему телу количества теплоты нагревателя Q_H :

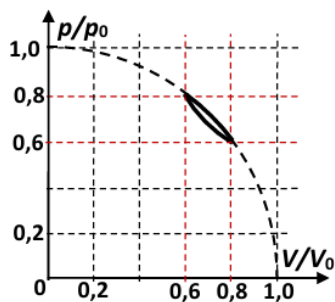
$\eta \equiv \frac{A}{Q_H}$, а коэффициент трансформации теплового насоса есть отношение переданного

нагреваемому телу количества теплоты к произведенной рабочим телом работе: $K \equiv \frac{Q_H}{A}$. Если

они работают по одному циклу (с разным направлением обхода, но одинаковыми соотношениями работы и количеств теплоты), то $K = \frac{1}{\eta}$.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Дано корректное определение КПД тепловой машины.	2
2	Дано корректное определение коэффициента трансформации теплового насоса.	3
3	Указано (используется в решении), что для заданного цикла отношения работы и количеств теплоты не зависят от направления обхода.	2
4	Дан правильный ответ.	3
Всего		10



Задача: На рисунке показана диаграмма цикла рабочего тела теплового насоса в координатах давление-объем (в относительных единицах). Рабочим телом является постоянное количество одноатомного идеального газа, а цикл состоит из изотермы и процесса, диаграмма которого является участком окружности (показанной пунктиром). На сколько % в этом процессе максимальная абсолютная температура больше минимальной? Пренебрегая потерями, найдите коэффициент трансформации этого теплового насоса с ошибкой не более 10%.

Решение задачи: Ясно, что минимальная температура в цикле – это температура изотермы, а максимальная – в «круговом» процессе на биссектрисе квадранта pV , где $\frac{p}{p_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Из уравнения Менделеева-Клапейрона мы понимаем, что температура пропорциональна произведению давления на объем, то есть $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{0,5}{0,48} = \frac{25}{24} \approx 1,04$.

Обе граничные точки процессов в цикле отвечают одинаковой температуре (они связаны изотермой), и изменение внутренней энергии равно нулю. Значит, в этих процессах количества теплоты совпадают (и по величине, и по знаку) с работой. Например, в процессе изотермического сжатия (это цикл рабочего тела теплового насоса, и он «обращенный», то есть положительной является работа внешних тел над газом) над газом совершается работа

$A = \nu RT \cdot \ln\left(\frac{V_H}{V_K}\right) = 0,48 \cdot p_0 V_0 \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right)$, и она равна количеству теплоты Q_x , поступившему от «холодильника» (внешней среды). В процессе, диаграмма которого представлена на рисунке, связь

давления и объема можно записать в виде $p(V) = p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2}$. Значит, количество теплоты,

которым газ обменялся с окружающими телами при малом изменении объема dV в этом процессе равно

$$\delta Q = p \cdot dV + \frac{3}{2} d(pV) = \frac{dV}{2} \left(5p + 3V \frac{dp}{dV} \right) = \frac{p_0 dV}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2}} \cdot \left[5 - 8 \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \right].$$

Мы видим, что в этом процессе происходит изменение направления теплообмена – при значении объема, равном $V_K = \sqrt{\frac{5}{8}} V_0 \approx 0,791 \cdot V_0$. Это значение попадает в интервал, отвечающий нашему процессу, но на «самый край», и при заданной точности (10 %) этим можно пренебречь, и считать, что во все этом процессе газ передает теплоту нагреваемому телу, то есть

$$Q_H \approx p_0 V_0 \cdot \int_{0,6}^{0,8} \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{p_0 V_0}{2} [\arcsin(0,8) - \arcsin(0,6)].$$

Таким образом, коэффициент трансформации

$$K = \frac{Q_H}{Q_H - Q_x} \approx \frac{\arcsin(0,8) - \arcsin(0,6)}{\arcsin(0,8) - \arcsin(0,6) - 0,96 \cdot \ln(4/3)} \approx 37.$$

Если записывать в процентах, то примерно 3700 %!

Ответ: $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{25}{24} \approx 1,04$, $K \approx \frac{\arcsin(0,8) - \arcsin(0,6)}{\arcsin(0,8) - \arcsin(0,6) - 0,96 \cdot \ln(4/3)} \approx 37$.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Указано, что минимальная температура отвечает изотерме.	1
2	Указано, что максимальная температура достигается в «круговом» процессе на биссектрисе квадранта pV .	2
3	Правильно найдено отношение максимальной и минимальной температур.	2

4	Указано (используется в решении), что изменения внутренней энергии в обоих процессах равно нулю.	1
5	Правильно вычислено Q_x .	2
6	Найдена точка изменения направления теплообмена.	1
7	Указано, что учетом изменения характеристик цикла из-за ее появления можно пренебречь.	1
8	Правильно вычислено Q_H .	3
9	Правильно определен К.	2
Всего		15

Задание 3: «Диоды-потребители»

Вопрос: Конденсатор с емкостью $C = 50$ мкФ был заряжен до напряжения 5 В. Его разрядили через соединительные провода и слабонеидеальный диод, который при положительном напряжении ниже 2 В полностью «запирается» (ток через него не течет), а при напряжении 2 В может пропускать любой ток без увеличения напряжения. Какое количество теплоты выделилось в процессе разрядки в соединительных проводах? Излучением пренебречь.

Ответ на вопрос: В процессе разрядки напряжение на конденсаторе упадет от 5 В до 2 В (потом диод запрется). Уменьшение энергии конденсатора $\Delta E_C = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{CU^2}{2} = 0,525$ мДж, и (поскольку

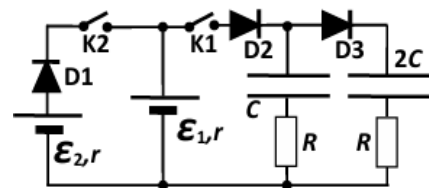
излучением пренебрегаем) вся эта энергия выделится в виде тепла в диоде а в соединительных проводах. Количество теплоты, выделившееся в диоде $Q_D = U \cdot \Delta q = CU(U_0 - U) = 0,3$ мДж.

Следовательно, в проводах выделилось количество теплоты $Q_R = \frac{C(U_0 - U)^2}{2} = 0,225$ мДж.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Указано (используется в решении), что все уменьшение энергии конденсатора обеспечивает выделение тепла в диоде и проводах.	2
2	Указано, что напряжение на конденсаторе упадет от 5 В до 2 В.	2
3	Правильно вычислено ΔE_C (аналитически или численно).	2
4	Правильно вычислено Q_D (аналитически или численно).	2
5	Правильно вычислено численное значение Q_R .	2
Всего		10

Задача: В схеме, показанной на рисунке, все три диода – слабонеидеальные (точно такие же, как в вопросе). Изначально оба конденсатора были разряжены. В некоторый момент времени ключ К1 замкнули, а затем, спустя некоторое время, замкнули и ключ К2. Известно, что ЭДС батарей в схеме $\mathcal{E}_1 = 3$ В и $\mathcal{E}_2 = 9$ В, их внутренние сопротивления одинаковы и много меньше 0,1 Ом, $R = 8$ Ом. Найдите количество теплоты, выделившееся в резисторах после замыкания К1 до замыкания К2. Найдите количество теплоты, которое дополнительно выделится в резисторах после замыкания К2.



Решение задачи: После замыкания К1 конденсаторы заряжаются от источника: первый (емкость C) – до заряда $q_1 = C(\mathcal{E}_1 - U)$. При этом максимальное напряжение на нем равно $\mathcal{E}_1 - U = 1$ В, и это меньше порогового напряжения диода. Поэтому второй конденсатор (емкость $2C$) заряжаться не будет. Работа источника $A = \mathcal{E}_1 \cdot q_1 = C\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_1 - U)$. Количество теплоты, выделившееся в диоде D2, равно $Q_D = U \cdot q_1 = CU(\mathcal{E}_1 - U)$. В D3 тепло выделяться не будет. Увеличение энергии конденсаторов $\Delta E_C = \frac{q_1^2}{2C} = \frac{C}{2}(\mathcal{E}_1 - U)^2$. Поэтому (выделением тепла на малом внутреннем сопротивлении источника пренебрегаем) количество теплоты, выделившееся в резисторах, равно $Q_R = A - Q_D - \Delta E_C = \frac{C}{2}(\mathcal{E}_1 - U)^2 = 0,025$ мДж.

Отметим, что все это тепло выделилось в «левом» (по схеме) резисторе. При замыкании К2 источник изменяет свои характеристики. Так как сопротивления в образовавшемся контуре с источниками очень малы, и в нем нет конденсаторов или катушек, а при этом разность ЭДС источников больше порогового напряжения диода, то в этом контуре быстро установится постоянный ток I , текущий через D1. Записав условие баланса напряжений на ветвях с источниками, находим его силу:

$$\mathcal{E}_2 - Ir - U = Ir + \mathcal{E}_1 \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 - U}{2r} \Rightarrow Ir = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 - U}{2} = 2\text{В}.$$

Таким образом, ЭДС «нового источника» $\mathcal{E} = Ir + \mathcal{E}_1 = 5\text{В}$, и теперь диод D3 открывается. В новом установившемся состоянии заряды конденсаторов $q'_1 = C(\mathcal{E} - U)$ и $q'_2 = 2C(\mathcal{E} - 2U)$. Значит, увеличение энергии конденсаторов после замыкания К2

$$\Delta E'_C = \frac{q'^2_1}{2C} + \frac{q'^2_2}{4C} - \frac{C}{2}(\mathcal{E}_1 - U)^2 = \frac{C}{2}[3\mathcal{E}^2 - 10U\mathcal{E} + 9U^2 - (\mathcal{E}_1 - U)^2] = 0,25\text{мДж}.$$

Работа источника (по дозарядке конденсаторов)

$$A' = \mathcal{E} \cdot (q'_1 + q'_2 - q_1) = C\mathcal{E}(3\mathcal{E} - \mathcal{E}_1 - 4U) = 1\text{мДж}.$$

Количество теплоты, выделившееся в диодах в процессе дозарядки

$$Q'_D = U \cdot (q'_1 + 2q'_2 - q_1) = CU(5\mathcal{E} - \mathcal{E}_1 - 8U) = 0,6\text{мДж}.$$

В результате получаем, что

$$Q'_R = A' - Q'_D - \Delta E'_C = 0,15\text{мДж}.$$

На сей раз тепло выделяется в обоих резисторах. Обратим внимание, что в контуре с источниками постоянно выделяется тепло (на D1 и внутренних сопротивлениях источников) за счет совершения источниками работы, но мы его не считаем – нас интересовало только количество теплоты, выделяющееся в резисторах в «правой» части схемы, по отношению к которой этот контур ведет себя как источник постоянного напряжения.

Ответ: $Q_R = 0,025\text{ мДж}$, $Q'_R = 0,15\text{ мДж}$.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Правильно определены установившиеся заряды конденсаторов после замыкания К1	1
2	Правильно определена работа источника.	2
3	Правильно определено изменение энергии конденсаторов.	2
4	Правильно определено количество теплоты, выделившееся в диодах.	1
5	Получен верный ответ для Q_R .	2
6	Определен ток в контуре с источниками после замыкания К2.	1
7	Определено значение ЭДС «нового» источника.	1
8	Правильно определена работа источника на второй стадии.	1
9	Правильно определено изменение энергии конденсаторов на второй стадии.	1
10	Правильно определено количество теплоты, выделившееся в диодах на второй стадии.	2
11	Найдено, что $Q'_R = 0,15\text{ мДж}$.	1
Всего		15

Задание 4: «Ползущий зайчик»

Вопрос: На расстоянии 72 см от пламени маленькой свечи расположили плоский вертикальный экран. У нас есть тонкая линза с оптической силой 10 дптр. На каких расстояниях от пламени свечи можно поставить эту линзу между пламенем и экраном, чтобы наблюдать на экране четкое изображение пламени?

Ответ на вопрос: Для создания изображения, которое можно наблюдать на экране, линза должна быть собирающей. Это требование выполнено – оптическая сила линзы положительна. В

соответствии с формулой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = D$, и по условию $a + b = L$. Здесь мы воспользовались тем, что изображение обязательно должно быть действительным, то есть a и b положительны. Комбинируя эти уравнения, получаем:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L - a} = D \Rightarrow a^2 - La + \frac{L}{D} = 0 \Rightarrow a = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{L}{D}} = 36\text{см} \pm 24\text{см}.$$

Итак, a может принимать два значения: 60 см (при этом $b = 12$ см), и 12 см (при этом $b = 60$ см).

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Правильно записана формула линзы.	2
2	Записано уравнение, эквивалентное $a + b = L$.	2
3	Получено правильное уравнение для a .	2
4	Найдены оба возможных значения a .	2+2=4
Всего		10

Задача: Небольшой светодиод установили так, чтобы ось пучка испускаемого им света была перпендикулярна плоскому экрану. Затем на этой оси разместили тонкую линзу таким образом, чтобы она давала на экране четкое изображение «глазка» светодиода. Когда линзу начали плавно перемещать вдоль ее плоскости (и параллельно экрану), то центр изображения стал двигаться с постоянной скоростью $V_1 = 2,5$ мм/с. Тогда линзу перенесли в другое положение, в котором она тоже давала на этом экране четкое изображение глазка светодиода, и из нового положения начали плавно перемещать точно так же, как и в первом опыте. Центр изображения начал двигаться с меньшей скоростью $V_2 < V_1$. Найдите ее величину.

Решение задачи: Поскольку изображение наблюдалось на экране, то оно было действительным, а линза была собирающей. Понятно, что при смещении линзы параллельно экрану изображение тоже смещается, причем ход луча, идущий от центра источника в центр изображения без преломления (через оптический центр линзы), показывает нам, что отношение скоростей изображения и линзы

$\frac{V}{u} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{a - F}$. Мы знаем, что светодиод и экран остались на месте, то есть два положения

линзы – те ее положения, при которых на экране наблюдается четкое изображение светодиода. Так как во втором случае скорость оказалась меньшей, то в первом случае линза была ближе к источнику, чем к экрану ($b > a$), а во втором наоборот. Таким образом, если расстояние между

светодиодом и экраном обозначить L , то $a_{1,2} = \frac{L}{2} \mp \sqrt{\frac{L^2}{4} - LF}$. Значит,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{a_2}{a_1} \frac{a_1 - F}{a_2 - F} = \frac{L - \sqrt{L^2 - 4LF}}{L + \sqrt{L^2 - 4LF}} = \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{1 + \sqrt{1 - x}},$$

где $x \equiv \frac{4F}{L} < 1$. Последнее условие означает, что при $L < 4F$ выполнить условие не получится.

Таким образом, $V_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{1 + \sqrt{1 - x}} \cdot 2,5$ м/с. Отметим, что для системы из примера $x = \frac{5}{9}$, и в этом случае $V_2 = 0,5$ м/с.

Ответ: $V_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{1 + \sqrt{1 - x}} \cdot 2,5$ м/с, и для системы из примера $V_2 = 0,5$ м/с.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Указано (используется в решении), что два положения линзы в задаче связаны так же, как и в вопросе.	2
2	Указано, что линзу отодвигали от светодиода (a увеличилось, а b уменьшилось)	2
3	Используется соотношение $a_{1,2} = \frac{L}{2} \mp \sqrt{\frac{L^2}{4} - LF}$.	2
4	Указано (используется в решении), что при поперечном смещении линзы смещение центра изображения определяется ходом луча, идущего без преломления.	2
5	Получено соотношение, эквивалентное $\frac{V}{u} = \frac{a}{a - F}$.	2
6	Записано правильное уравнение для отношения скоростей изображений.	2
7	Получен ответ в виде, эквивалентном авторскому.	3
Всего		15