

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «Робофест» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2025 года, ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР
БИЛЕТ № 03 (10 классы), возможные решения и критерии.

Задание 1: «Полярная орбита»

Вопрос: Согласно уравнению Мещерского, сила тяги реактивного двигателя, выбрасывающего продукты сгорания топлива массой Δm за малое время Δt со скоростью истечения u (относительно себя), равна $\vec{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{u}$. Величину $q \equiv \frac{\Delta m}{\Delta t}$ обычно называют *расходом* массы (топлива и окислителя). Допустим, что летательный аппарат, снабженный реактивным двигателем, расходует 1% от собственной массы за 10 с. При какой величине скорости истечения он может «зависнуть» неподвижно в поле тяжести у поверхности Земли, где ускорение свободного падения $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

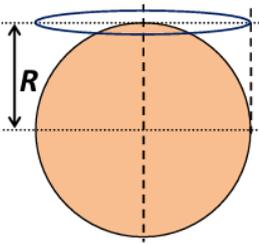
Ответ на вопрос: Для того, чтобы ЛА был неподвижен, сила реактивной тяги должна уравновешивать силу тяжести, то есть должно выполняться равенство

$$mg = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot u \Rightarrow u = \frac{m}{\Delta m} g \Delta t = 100g \Delta t \approx 10 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Указано (используется в решении), что сила реактивной тяги должна уравновешивать силу тяжести.	3
2	Записано правильное уравнение для определения u .	4
3	Получен правильный численный ответ.	3
Всего		10

Задача: Пусть нам необходим спутник, работающий на «полярной орбите». Это круговая орбита с радиусом, равным радиусу Земли R , центр которой совпадает с одним из полюсов Земли, а плоскость перпендикулярна оси вращения Земли. Для вращения по этой орбите спутник использует реактивный двигатель, направление силы тяги которого выбрано так, чтобы расход массы топлива и окислителя был минимален. Найдите период обращения этого спутника. Считайте известным, что период обращения спутника без двигателя по низковысотной круговой орбите $T_0 \approx 5000 \text{ с}$. Пусть также известно, что в момент начала работы спутника на этой орбите запасы топлива и окислителя составляли половину общей массы спутника, а скорость истечения продуктов сгорания $u = 10 \text{ км/с}$. Оцените время работы такого спутника на этой орбите. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.



Решение задачи: Пусть R – радиус Земли. На спутник действуют две силы: сила тяжести и сила реактивной тяги. При движении по круговой орбите вектор ускорения лежит в плоскости орбиты, поэтому перпендикулярные ей компоненты сил должны компенсировать друг друга, то есть

$$\frac{1}{2} mg \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot u \cdot \cos(\beta),$$

где β – угол между направлением вектора силы тяги и перпендикуляром к плоскости орбиты. Здесь мы учли, что спутник находится на расстоянии $R\sqrt{2}$ от центра Земли, и по закону всемирного тяготения Ньютона сила тяжести для него в два раза меньше, чем на поверхности Земли, и она направлена к центру Земли. Как видно, расход топлива минимален при $\beta = 0$, то есть сила реактивной тяги должна быть перпендикулярно плоскости орбиты. Тогда центростремительное ускорение спутника на орбите создается только проекцией силы тяжести на плоскость орбиты и постоянна, и скорость спутника находится из уравнения

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{1}{2} mg \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gR}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{2\sqrt{2} \frac{R}{g}} = T_0 \sqrt{2\sqrt{2}} \approx 8409 \text{ с}.$$

При этом относительная скорость расхода массы

$$\frac{1}{m} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{g}{u} \Rightarrow \Delta t \approx 2\sqrt{2} \frac{\Delta m u}{m g} \approx 1400 \text{ с}.$$

Это, конечно же, оценка (на самом деле масса убывает экспоненциально, а не линейно), но для данной задачи этого достаточно. Но, как видно, запасов топлива и окислителя в таком режиме не хватит даже на один оборот.

Ответ: $T = T_0 \sqrt{2\sqrt{2}} \approx 8409$ с, $\Delta t \approx 2\sqrt{2} \frac{\Delta m u}{m g} \approx 1400$ с.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Указано (используется в решении), что на спутник действуют две силы: сила тяжести и сила реактивной тяги.	1
2	Указано (используется в решении), что перпендикулярные плоскости орбиты компоненты сил должны компенсировать друг друга.	2
3	Записано правильное уравнение для расхода топлива и окислителя.	2
4	Установлено, что сила реактивной тяги должна быть перпендикулярно плоскости орбиты	3
5	Записано правильное уравнение для центростремительной компоненты ускорения.	2
6	Получен правильный аналитический ответ для периода вращения.	2
7	Получен правильный численный ответ для периода вращения.	1
8	Получен правильный аналитический ответ для времени работы.	1
9	Получен правильный численный ответ для времени работы.	1
Всего		15

Задание 2: «Уменьшение давления при сжатии»

Вопрос: В двух одинаковых баллонах неизменного объема находятся разные количества одного и того же газа, который можно считать идеальным. В первом баллоне находятся 20 г газа при температуре 27°C, а во втором – 25 г газа при температуре 57°C. На сколько % давление во втором баллоне выше, чем в первом?

Ответ на вопрос: Давление идеального газа определяется из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$p = \frac{m RT}{\mu V}. \text{ Поскольку объемы и молярные массы одинаковы, то } \frac{p'}{p} = \frac{m'T'}{mT} = \frac{55}{40} = 1,375. \text{ Таким}$$

образом, во втором баллоне давление на 37,5 % выше, чем в первом.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Записано уравнение Менделеева-Клапейрона.	3
2	Отмечено (используется в расчете), что объемы одинаковы.	1
3	Отмечено (используется в расчете), что молярные массы одинаковы.	1
4	Записан верный аналитический ответ для отношения давлений.	2
5	Получен правильный численный ответ для отношения давлений.	3
Всего		10

Задача: В жесткий баллон закачивают воздух, одновременно охлаждая его. В результате температура газа в баллоне в зависимости от массы газа изменяется по закону

$$T(m) = \frac{T_0}{4} \left(1 + 3 \frac{m_0^2}{m^2} \right),$$

где T_0 – начальная температура. Начальное давление воздуха в баллоне равнялось $p_0 = 200$ кПа. В ходе такого процесса масса газа в баллоне была увеличена от $m_0 = 1$ кг до $m_1 = 3$ кг. Найдите минимальную величину давления газа за все время закачивания. При какой массе газа в баллоне давление было минимальным? Воздух можно считать идеальным газом.

Решение задачи: В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, $p = \frac{m RT}{\mu V}$. Подставим в

это соотношение уравнения процесса и получим давление как функцию массы газа в баллоне:

$$p(m) = \frac{RT_0 m_0}{4\mu V} \frac{m}{m_0} \left(1 + 3 \frac{m_0^2}{m^2} \right) = \frac{RT_0 m_0}{4\mu V} \sqrt{3} \left(\frac{m}{m_0 \sqrt{3}} + \frac{m_0 \sqrt{3}}{m} \right).$$

Как известно, функция $y(x) = x + \frac{1}{x}$ минимальна при $x = 1$, и давление будет минимальным при

$m = m_0 \sqrt{3} \approx 1,73$ кг, поскольку это значение принадлежит заданному интервалу изменения массы.

Минимальное давление $p_{\min} = \sqrt{3} \frac{RT_0 m_0}{2\mu V} = \frac{\sqrt{3}}{2} p_0 \approx 173$ кПа.

Ответ: минимальное давление $p_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} p_0 \approx 173 \text{ кПа}$ достигается при $m = m_0 \sqrt{3} \approx 1,73 \text{ кг}$.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Записано (используется в решении) выражение для давления, следующее из уравнения Менделеева-Клапейрона.	2
2	Получено уравнение для $p(m)$	3
3	Указано, что минимум $x+1/x$ отвечает $x = 1$	2
4	Получен аналитический и численный ответы для m	2+1=3
5	Получен аналитический ответ для p_{\min}	3
6	Получен численный ответ для p_{\min}	2
Всего		15

Задание 3: «Почти идеальные приборы».

Вопрос: Амперметры с сопротивлениями 2 мОм и 3 мОм соединили параллельно, и эту пару соединили последовательно с другой, в которой параллельно были соединены еще один амперметр с сопротивлением 1 мОм и резистор с сопротивлением 100 Ом. На эту цепь подали напряжение от источника с ЭДС 5 В и внутренним сопротивлением 1 Ом. Каковы показания амперметров? Известно, что они измеряют силу тока с ошибкой менее 0,05 А.

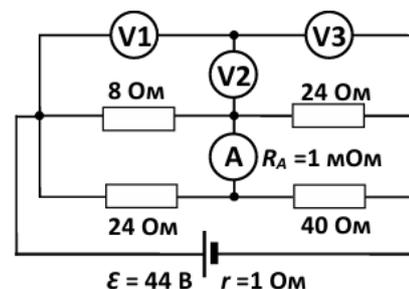
Ответ на вопрос: Сопротивление пары параллельно соединенных амперметров $R_I = \frac{2 \text{ мОм} \cdot 3 \text{ мОм}}{5 \text{ мОм}} = 1,2 \text{ мОм}$. Сопротивление второй параллельной пары $R_{II} = \frac{1 \text{ мОм} \cdot 100 \text{ Ом}}{100,001 \text{ Ом}} \approx 1 \text{ мОм}$, но сразу было ясно, что оно практически равно сопротивлению амперметра (сопротивление резистора в 100000 раз больше, и ток через него практически не течет). Полное сопротивление цепи примерно равно 1,0022 Ом, и ток через источник с указанной точностью примерно равен 5 А. Как мы поняли, через амперметр, подключенный параллельно резистору, этот ток течет практически весь, и его показания 5,00 А (прямое вычисление с точностью до сотых дает 4,99 А, но при заданной точности эти результаты «неразличимы»). В параллельной паре амперметров токи делятся обратно пропорционально сопротивлениям, так что амперметр с меньшим сопротивлением должен показывать примерно 3,00 А, а с большим – примерно 2,00 А.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Указано (используется в решении), что резистор практически не влияет на показания амперметров.	1
2	Установлено (используется в решении), что полное сопротивление схемы с ошибкой около 0,2 % совпадает с внутренним сопротивлением источника.	1
3	Определена сила тока в цепи, попадающая в интервал $(5,00 \pm 0,02) \text{ А}$	2
4	Определены показания A_1 (2 мОм), попадающие в интервал $(3,00 \pm 0,02) \text{ А}$	2
5	Определены показания A_2 (3 мОм), попадающие в интервал $(2,00 \pm 0,02) \text{ А}$	2
6	Определены показания A_3 (1 мОм), попадающие в интервал $(5,00 \pm 0,02) \text{ А}$	2
Всего		10

Задача: В схеме, показанной на рисунке, суммарное сопротивление соединительных проводов менее 1 мОм, все три вольтметра одинаковы, и их внутренние сопротивления более 1 МОм. Характеристики остальных элементов схемы показаны на рисунке. Найдите силу тока, текущего в ветви с источником. Определите показания всех приборов (амперметра и трех вольтметров) с ошибкой менее 5 %.

Решение задачи: Понятно, что вольтметры, благодаря огромным сопротивлениям, практически не влияют на токи через резисторы и амперметр (силы токов в вольтметрах порядка сотых долей процента от сил токов в резисторах и амперметре). Поэтому при расчете токов в резисторах пренебрежем наличием вольтметров в схеме. С другой стороны, сила тока через амперметр одного порядка с силами токов в резисторах, но его сопротивление в несколько тысяч раз меньше, так что при расчете напряжений в схеме напряжением на амперметре можно пренебречь – мы можем его мысленно закоротить. Тогда вся наша схема – это просто две параллельные пары резисторов, подключенные последовательно к источнику. Таким образом, при расчете сил токов через резисторы мы можем считать, что полное



сопротивление цепи, подключенной к источнику $R = 1 \text{ Ом} + \frac{8 \cdot 24}{32} \text{ Ом} + \frac{40 \cdot 24}{64} \text{ Ом} = 22 \text{ Ом}$. Следовательно, сила тока в ветви с источником равна 2 А. В первой параллельной паре этот ток делится в соотношении 3:1, то есть сила тока, текущего через резистор 8 Ом, равна 1,5 А, а через резистор 24 Ом 0,5 А. Во второй паре – в отношении 5:3, и сила тока через резистор 24 Ом равна 1,25 А, а через резистор 40 Ом – 0,75 А. Из непрерывности тока ясно, что разность сил токов в резисторах 8 Ом и 24 Ом (из второй пары) равна силе тока через амперметр. Значит, показания амперметра $I_A = 0,25 \text{ А}$, с ошибкой не более десятых долей процента (явно заметно менее 5%).

Теперь мы можем определить напряжения на выводах от вольтметров. Напряжение на выводах от V1 и V2 равно напряжению на резисторе 8 Ом, то есть (поскольку сила тока через него 1,5 А) 12 В. Аналогично напряжение на выводах от V2 и V3 равно напряжению на резисторе 24 Ом, то есть 30 В. Выбрав положительную полярность подключения (например, у V1 и V3 «плюс» слева по схеме, а у V2 сверху), запишем для показаний вольтметров уравнения $U_1 + U_2 = 12 \text{ В}$ и $U_1 + U_3 = 42 \text{ В}$. Чтобы записать третье уравнение для этих трех неизвестных вспомним, что токи через вольтметры все-таки текут (пусть и очень малые), и для них тоже справедлив принцип непрерывности тока, согласно которому $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + \frac{U_3}{R} \Rightarrow U_1 = U_2 + U_3$. Решая совместно эту систему, находим, что $U_1 = 18 \text{ В}$, $U_2 = -6 \text{ В}$, $U_3 = 24 \text{ В}$. Мы «не угадали» полярность напряжения на V1, но все значения напряжения успешно нашли.

Ответ: показания приборов (по величине) $I_A = 0,25 \text{ А}$, $U_1 = 18 \text{ В}$, $U_2 = 6 \text{ В}$, $U_3 = 24 \text{ В}$.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Указано (используется в решении), что вольтметры не влияют на силы токов через резисторы и амперметр.	2
2	Указано, что при расчете напряжений на резисторах амперметр можно «закоротить».	2
3	Правильно определена сила тока в ветви с источником.	3
4	Правильно определены напряжения на двух парах выводов от вольтметров.	1×2=2
5	Для вольтметров записан принцип непрерывности тока.	2
6	Правильно определены показания амперметра (число).	1
7	Правильно определены показания вольтметра V1 (число).	1
8	Правильно определены показания вольтметра V2 (число).	1
9	Правильно определены показания вольтметра V3 (число).	1
Всего		15

Задание 4: «Ползущий зайчик»

Вопрос: С помощью тонкой линзы с модулем фокусного расстояния 50 см создано изображение пламени маленькой свечи. Это изображение оказалось перевернутым и увеличенным. Какая это линза – рассеивающая или собирающая? Какое это изображение – действительное или мнимое? На каком расстоянии от пламени свечи мог при этом находиться оптический центр линзы?

Ответ на вопрос: Перевернутые изображения действительных предметов создают только собирающие линзы, так что наша линза собирающая. При этом мнимые изображения в собирающих линзах всегда прямые, так что это изображение действительное. Модуль поперечного увеличения такого изображения равен отношению расстояний от линзы до изображения и источника, которое можно найти из формулы линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow |\Gamma_{\perp}| = \frac{b}{a} = \frac{F}{|a-F|}$$

Значит, $|\Gamma_{\perp}| > 1$ для действительных перевернутых изображений в собирающей линзе при $F < a < 2F$. Таким образом, оптический центр линзы мог находиться на расстоянии из диапазона $50 \text{ см} < a < 100 \text{ см}$ от пламени свечи.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Указано, что линза является собирающей.	1
2	Это утверждение обосновано.	2
3	Указано, что изображение действительное.	1
4	Это утверждение обосновано.	2
5	Записана (используется в решении) связь Γ_{\perp} с расстоянием от линзы до источника.	2

6	Получен правильный допустимый интервал значений a .	2
Всего		10

Задача: Небольшой светодиод установили так, чтобы ось пучка испускаемого им света была перпендикулярна плоскому экрану. Когда на этой оси на расстоянии $a_1 = 60$ см от светодиода разместили тонкую линзу, то на экране наблюдалось четкое изображение «глазка» светодиода. Когда линзу начали плавно перемещать вдоль ее плоскости (и параллельно экрану) со скоростью $u = 2$ мм/с, то центр изображения стал двигаться с постоянной скоростью $V_1 = 4$ мм/с. Тогда линзу придвинули к светодиоду на новое расстояние $a_2 = 30$ см и сдвинули экран так, чтобы на нем снова было видно четкое изображение «глазка» светодиода, и из нового положения начали плавно перемещать линзу точно так же, как и в первом опыте. Найдите скорость движения центра изображения по экрану V_2 во втором опыте.

Решение задачи: Поскольку изображение наблюдалось на экране, то оно было действительным, а линза была собирающей. Понятно, что при смещении линзы параллельно экрану изображение тоже смещается, причем ход луча, идущий от центра источника в центр изображения без преломления (через оптический центр линзы), показывает нам, что отношение скоростей изображения и линзы

$\frac{V}{u} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{a-F} \Rightarrow F = \left(1 - \frac{u}{V}\right)a$. Применяя эту формулу для первого опыта, находим, что

$F = \left(1 - \frac{u}{V_1}\right)a_1 = 30$ см. Тогда для второго опыта мы обнаруживаем, что после перемещения линзы

«глазок» светодиода оказался в ближней фокальной плоскости линзы, и его четкое изображение получить на экране нельзя – каждая его точка порождает параллельный пучок лучей.

Ответ: во втором опыте «глазок» светодиода находится в ближней фокальной плоскости линзы, и его четкого изображения не существует.

Критерии проверки:

№	действие	балл
1	Указано (используется в решении), что линза является собирающей.	2
2	Указано и обосновано, что изображение является действительным.	2+2=4
3	Указано (используется в решении), что при поперечном смещении линзы смещение центра изображения определяется ходом луча, идущего без преломления	2
4	Правильно записано уравнение связи скорости центра изображения с a и F .	2
5	Правильно найдено фокусное расстояние линзы.	2
6	Указано и обосновано, что четкого изображения на экране во втором опыте наблюдать нельзя.	1+2=3
Всего		15