

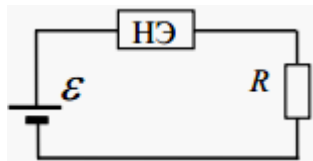
7-9 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

**Набор задач для самостоятельного решения к занятию «нелинейные цепи постоянного тока».**

**Задача 1 (3 балла) [нелинейные цепи, ВАХ, последовательное соединение]**

ЭДС источника постоянного напряжения  $\mathcal{E} = 6\text{В}$ , а его внутреннее сопротивление  $r = 1\text{Ом}$ . К этому источнику подключили, соединив последовательно, резистор с сопротивлением  $R = 2r = 2\text{Ом}$  и нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого описывается выражением  $I(U) = \alpha \cdot \sqrt{U} \equiv \frac{3}{r} \sqrt{\frac{\mathcal{E}U}{10}}$ . Найдите силу тока через нелинейный элемент в этой схеме.. Ответ запишите в А, с точностью до десятых.



Подсказка 1: Напряжение на источнике  $U = \mathcal{E} - Ir$  равно сумме напряжений на резисторе и на нелинейном элементе.

Подсказка 2: Напряжение на нелинейном элементе  $U_{нэ}$  можно выразить из уравнения ВАХ.

Подсказка 3:  $U_{нэ} = \frac{10 r^2 I^2}{9 \mathcal{E}} \Rightarrow \mathcal{E} - Ir = 2Ir + \frac{10 r^2 I^2}{9 \mathcal{E}}$ .

Решение:

Напряжение на источнике  $U = \mathcal{E} - Ir$  равно сумме напряжений на резисторе  $U_R = IR = 2Ir$  и

на нелинейном элементе  $U_{нэ} = \frac{10 r^2 I^2}{9 \mathcal{E}}$  (его мы выразили из уравнения ВАХ этого элемента). Таким образом, сила тока в цепи должна удовлетворять уравнению

$\mathcal{E} - Ir = 2Ir + \frac{10 r^2 I^2}{9 \mathcal{E}} \Rightarrow x^2 + \frac{27}{10}x - \frac{9}{10} = 0$ , где  $x \equiv \frac{rI}{\mathcal{E}}$ . Выбирая положительный корень

этого уравнения, находим  $x = \frac{3}{10} \Rightarrow I = \frac{3}{10} \frac{\mathcal{E}}{r} = 1,8\text{ А}$ .

Ответ: 1,8.

**Задача 2 (3 балла) [нелинейные цепи, ВАХ, параллельное соединение]**

ЭДС источника постоянного напряжения  $\mathcal{E} = 6,3\text{В}$ , а его внутреннее сопротивление  $r = 3\text{Ом}$ . К этому источнику подключили, соединив параллельно, резистор с сопротивлением  $R = \frac{4}{3}r = 4\text{Ом}$  и нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого описывается

выражением  $I(U) = \alpha \cdot \sqrt{U} \equiv \frac{3}{r} \sqrt{\mathcal{E}U}$ . Найдите силу тока через нелинейный элемент в этой схеме. Ответ запишите в А, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Напряжения на резисторе и нелинейном элементе равны друг другу и равны напряжению на источнике:  $U_{нэ} = U_R \equiv U = \mathcal{E} - Ir$ .

Подсказка 2: Сила тока  $I$  в ветви с источником есть сумма сил токов через нелинейный элемент, который мы находим через уравнение ВАХ, и через резистор, который мы находим по закону Ома.

Подсказка 3:  $I = I_{нэ} + I_R = \frac{3}{r}\sqrt{\mathcal{E}U} + \frac{3U}{4r} \Rightarrow U = \mathcal{E} - 3\sqrt{\mathcal{E}U} - \frac{3U}{4}$ .

Решение:

Напряжения на резисторе и нелинейном элементе равны друг другу и равны напряжению на источнике:  $U_{нэ} = U_R = U = \mathcal{E} - Ir$ . Сила тока в ветви с источником есть сумма сил токов через нелинейный элемент, который мы находим через уравнение ВАХ, и через резистор, который мы находим по закону Ома:  $I = I_{нэ} + I_R = \frac{3}{r}\sqrt{\mathcal{E}U} + \frac{3U}{4r}$ . Подставив это соотношение

в выражение для напряжения, получаем уравнение  $U = \mathcal{E} - 3\sqrt{\mathcal{E}U} - \frac{3U}{4}$ . Его можно решить

как квадратное уравнение для переменной  $x \equiv \sqrt{\frac{U}{\mathcal{E}}}$ :  $x^2 + \frac{12}{7}x - \frac{4}{7} = 0$ . Выбирая

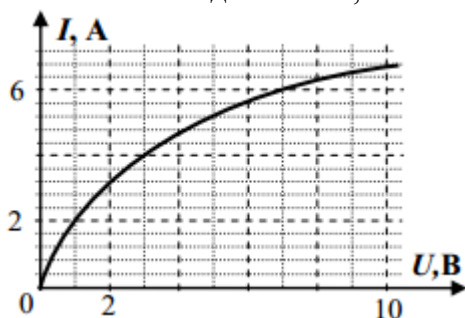
положительный корень, получаем, что  $x = \frac{2}{7} \Rightarrow U = \frac{4}{49}\mathcal{E}$ . Теперь вычисляем величины сил

тока:  $I_{нэ} = \frac{6\mathcal{E}}{7r} = 1,8 \text{ А}$ .

Ответ: 1,8.

### Задача 3 (3 балла) [нелинейные цепи, ВАХ, закон Джоуля-Ленца]

Лампочку накаливания, ВАХ которой показана на рисунке, подключают к аккумулятору с ЭДС  $\mathcal{E} = 9 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 1,5 \text{ Ом}$ . Найдите мощность, потребляемую лампой. Ответ дайте в Вт, с точностью до целого значения.



Подсказка 1: Ток в цепи  $I$  и напряжение на лампе  $U$ , равное напряжению на источнике, должны быть связаны уравнением ее ВАХ.

Подсказка 2: По закону Ома для участка цепи с ЭДС  $U = \mathcal{E} - Ir \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}$ .

Подсказка 3: Систему уравнений  $I = f(U)$  и  $I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}$  можно решить графически.

Решение:

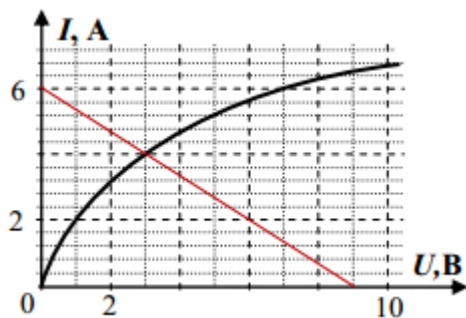
При подключении лампы к аккумулятору ток в цепи должен удовлетворять двум уравнениям. Во-первых, он связан с напряжением на лампе уравнением ее ВАХ  $I = f(U)$ . Во-вторых, напряжение на лампе совпадает с напряжением на аккумуляторе, и по закону

Ома для участка цепи с ЭДС  $U = \mathcal{E} - Ir \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}$ . Эту систему из двух уравнений для

двух неизвестных ( $I$  и  $U$ ) в данном случае нужно решать графически. Для этого на графике, на котором построена кривая  $I = f(U)$ , нужно построить «нагрузочную» прямую источника

$I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}$  (красная линия на рисунке). Точка их пересечения и определяет значение

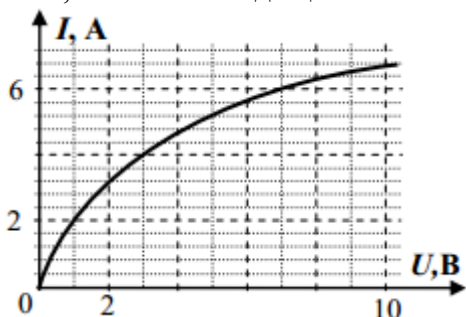
неизвестных. Из рисунка видно, что  $I \approx 4 \text{ А}$  и  $U \approx 3 \text{ В}$ . По закону Джоуля-Ленца мощность, потребляемая лампой,  $P = U \cdot I \approx 12 \text{ Вт}$ .



Ответ: 12.

**Задача 4 (3 балла) [нелинейные цепи, ВАХ, параллельное соединение, закон Джоуля-Ленца]**

Две одинаковые лампы накаливания, ВАХ каждой из которых показана на рисунке, подключают, соединив параллельно, к аккумулятору с ЭДС  $\mathcal{E} = 9\text{В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 1,5\text{Ом}$ . Найдите мощность, потребляемую обеими лампами. Ответ дайте в Вт, с точностью до целого значения.



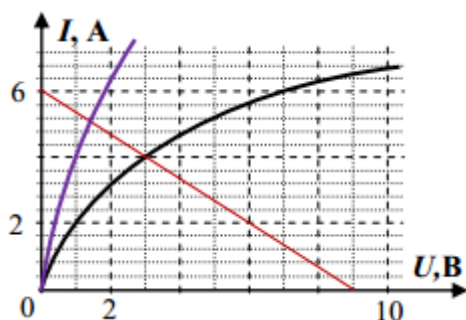
Подсказка 1: Удобно начать с построения ВАХ двух ламп, соединенных параллельно.

Подсказка 2: Для этого при каждом значении напряжения, которое для параллельно соединенных ламп является общим, нужно найти общий ток ламп, просуммировав токи в каждой из них.

Подсказка 3: Далее нужно найти точку пересечения построенной ВАХ с «нагрузочной» прямой источника  $I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}$ .

Решение:

Удобно начать с построения ВАХ двух ламп, соединенных параллельно. Для этого при каждом значении напряжения, которое для параллельно соединенных ламп является общим, нужно найти общий ток ламп, просуммировав токи в каждой из них. Так как лампы одинаковые, то нужно фактически удвоить величину силы тока при каждом значении напряжения (см. рисунок – сиреневая кривая). Далее нужно найти точку пересечения построенной ВАХ с «нагрузочной» прямой источника  $I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}$  (красная линия на рисунке).



Как видно, теперь сила тока через обе лампы  $I \approx 5,1\text{А}$ , а напряжение на лампах  $U \approx 1,4\text{В}$ . По закону Джоуля-Ленца мощность, потребляемая двумя лампами,  $P = U \cdot I \approx 7\text{Вт}$ .

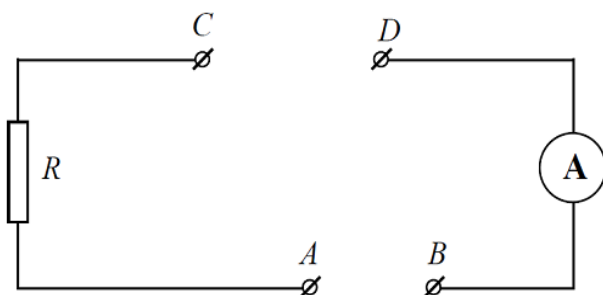
Ответ: 7.

**Задача 5 (4 балла) [нелинейные цепи, ВАХ, последовательное соединение, параллельное соединение]**

В схеме, показанной на рисунке, между клеммами  $A$  и  $B$  поддерживается неизменное напряжение. Если замкнуть клеммы  $C$  и  $D$  проводом с пренебрежимо малым сопротивлением, то практически идеальный амперметр в схеме покажет силу тока, равную  $I = 6,0 \text{ А}$ . Допустим, что у нас есть две одинаковые лампочки накаливания, для которых

связь силы тока с приложенным напряжением дается формулой  $I(U) = I_0 \sqrt{\frac{U}{U_0}}$ . Если

соединить эти лампочки последовательно и подключить к клеммам  $C$  и  $D$ , амперметр покажет ток  $I_1 = 1,0 \text{ А}$ . Каковы будут показания амперметра, если подключить к клеммам  $C$  и  $D$  эти же две лампочки, но соединенные параллельно? Ответ запишите в  $A$ , с точностью до десятых.



Подсказка 1: Опыт с коротким замыканием клемм  $C$  и  $D$  позволяет записать для напряжения между клеммами  $A$  и  $B$ :  $U_{AB} \approx IR$ .

Подсказка 2: При последовательном подключении ламп ток в них одинаков и равен  $I_1$ , а напряжения на лампах одинаковы и равны  $U(I_1) = U_0 \left( \frac{I_1}{I_0} \right)^2$ . Поэтому:

$$2U_0 \left( \frac{I_1}{I_0} \right)^2 = U_{AB} - I_1 R = (I - I_1) R.$$

Подсказка 3: Если при параллельном включении через амперметр течет ток  $I_2$ , то ток в каждой из ламп равен  $\frac{I_2}{2}$ .

Решение:

Опыт с коротким замыканием клемм  $C$  и  $D$  позволяет записать для напряжения между клеммами  $A$  и  $B$ :  $U_{AB} \approx IR$ . При последовательном подключении ламп ток в них одинаков и равен  $I_1$ , а напряжения на лампах одинаковы и равны  $U(I_1) = U_0 \left( \frac{I_1}{I_0} \right)^2$ . Поэтому:

$$2U_0 \left( \frac{I_1}{I_0} \right)^2 = U_{AB} - I_1 R = (I - I_1) R. \text{ Если при параллельном включении через амперметр течет}$$

ток  $I_2$ , то ток в каждой из ламп равен  $\frac{I_2}{2}$ , и поэтому  $U_0 \left( \frac{I_2}{2I_0} \right)^2 = U_{AB} - I_2 R = (I - I_2) R$ .

Разделив эти соотношения друг на друга, получаем уравнение для определения  $I_2$ :

$I_2^2 + \frac{8I_1^2}{I - I_1} I_2 - \frac{8II_1^2}{I - I_1} = 0$ . Физический смысл имеет только положительный корень, поэтому

$$I_2 = \frac{2I_1}{I - I_1} [\sqrt{4I_1^2 + 2I(I - I_1)} - 2I_1] = 2,4 \text{ А.}$$

Ответ: 2,4.

**Задача 6 (5 баллов) [нелинейные цепи, ВАХ, последовательное соединение, закон Джоуля-Ленца]**

Лампы накаливания обычно являются нелинейными элементами электрических цепей – ток в них не пропорционален напряжению. Допустим, у нас есть набор одинаковых ламп, для

которых связь тока и напряжения дается формулой  $I(U) = I_0 \sqrt{\frac{U}{U_0}}$ , где значения  $I_0$  и  $U_0$

соответствуют номинальному режиму. Кроме того, мы можем использовать набор одинаковых батарей с ЭДС  $\mathcal{E} = U_0$ . Если подключить одну лампу к одной батарее, на лампе

будет выделяться мощность  $P = \frac{27}{64} P_0$  ( $P_0$  – номинальная мощность). Из какого

минимального количества последовательно соединенных ламп надо составить гирлянду, чтобы при подключении ее к некоторому количеству последовательно соединенных таких же батарей все лампы гирлянды работали в точности в номинальном режиме? Ответ запишите в виде целого числа.

Подсказка 1: Напряжение на одной лампе связано с током через нее  $U = U_0 \left( \frac{I}{I_0} \right)^2$  и при

подключении к одной батарее равно напряжению на этой батарее  $U = U_0 - Ir$ .

Подсказка 2: Выделяемая на одной лампе при подключении к одной батарее мощность

$$P(I) = U(I)I = U_0 I_0 \left( \frac{I}{I_0} \right)^3.$$

Подсказка 3: Согласно условию, эта мощность равна  $\frac{27}{64} P_0 = \frac{27}{64} U_0 I_0$ .

Подсказка 4: Как видно, сила тока в одной лампе при подключении к одной батарее  $I = \frac{3}{4} I_0$ ,

$$\text{откуда } U_0 - \frac{3}{4} I_0 r = \frac{9}{16} U_0 \Rightarrow r = \frac{7}{12} \frac{U_0}{I_0}.$$

Решение:

Рассмотрим одну лампу, подключенную к одной батарее. Напряжение на лампе связано с

током через нее  $U = U_0 \left( \frac{I}{I_0} \right)^2$  и равно напряжению на батарее  $U_0 \left( \frac{I}{I_0} \right)^2 = U_0 - Ir$ .

С другой стороны, выделяемая на лампе мощность как функция тока через нее

$P(I) = U(I)I = U_0 I_0 \left( \frac{I}{I_0} \right)^3$ . В соответствии с условием, эта мощность равна

$$U_0 I_0 \left( \frac{I}{I_0} \right)^3 = \frac{27}{64} P_0 = \frac{27}{64} U_0 I_0. \text{ Значит, при подключении одной лампы к одной батарее}$$

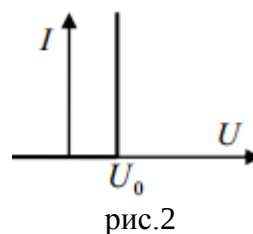
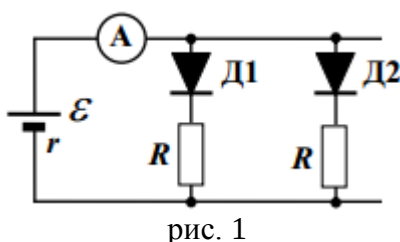
$I = \frac{3}{4} I_0$ . Таким образом,  $U_0 - \frac{3}{4} I_0 r = \frac{9}{16} U_0 \Rightarrow r = \frac{7}{12} \frac{U_0}{I_0}$ . При подключении гирлянды из  $n$  ламп к  $k$  батареям все лампы работают в номинальном режиме, если  $k[U_0 - I_0 r] = n U_0 \Rightarrow 5k = 12n$ .

Минимальное целочисленное решение соответствует  $n=5$ , при  $k=12$ .

Ответ: 5.

#### Задача 7 (4 балла) [нелинейные цепи, ВАХ, параллельное соединение]

К источнику постоянного напряжения подключают произвольные количества цепочек из двух элементов – резистора и «слабонеидеального» диода. Цепочки подключаются параллельно (см. схему на рисунке 1). ВАХ каждого диода изображена на рисунке 2. Амперметр в схеме можно считать идеальным. Известно, что при подключении одной цепочки он показывает силу тока  $I_1 = 0,5 \text{ А}$ , при подключении двух – силу тока  $I_2 = 0,9 \text{ А}$ . Найдите показания амперметра при подключении четырех цепочек. Ответ запишите в А, с точностью до десятых.



Подсказка 1: Хороший способ решения – рассмотреть схему с произвольным числом цепочек, равным  $n$ . Ток через амперметр можно найти из уравнения баланса напряжений для схемы (напряжение на ветви с источником равно напряжению на одной цепочке).

Подсказка 2: Действительно, это уравнение имеет вид  $\mathcal{E} - I_n r = U_0 + R \frac{I_n}{n}$ , откуда

$$I_n = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r + R/n}.$$

Подсказка 3: Удобно привести эту зависимость к линейному виду – для этого нужно рассмотреть зависимость  $1/I_n$  от  $1/n$ .

Решение:

Рассмотрим схему с произвольным числом цепочек, равным  $n$ . Ток  $I_n$ , текущий в ветви с источником и амперметром, разделяется поровну между всеми одинаковыми цепочками. Поэтому уравнение баланса напряжений для схемы (напряжение на ветви с источником равно напряжению на одной цепочке) имеет вид  $\mathcal{E} - I_n r = U_0 + R \frac{I_n}{n}$ . Из этого соотношения

находим, что  $I_n = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r + R/n}$ . Поскольку нам нужно «продолжить» эту зависимость, отталкиваясь от ее значений в двух точках, то удобно привести ее к линейному виду. Например, можно заметить, что обратная к силе тока величина есть линейная функция  $1/n$ :  $\frac{1}{I_n} = \frac{r}{\mathcal{E} - U_0} + \frac{R}{\mathcal{E} - U_0} \frac{1}{n} \equiv a + b \frac{1}{n}$ . Записав значение этой величины для двух точек, находим коэффициенты зависимости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{I_1} = a + b \\ \frac{1}{I_2} = a + \frac{1}{2}b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2I_1 - I_2}{I_1 I_2} \\ b = \frac{2(I_2 - I_1)}{I_1 I_2} \end{array} \right.$$

Следовательно,  $I_n = \frac{nI_1I_2}{2(I_2 - I_1) + n(2I_1 - I_2)}$ . При нужном значении  $n = 4$  получаем:

$$I_4 = \frac{2I_1I_2}{3I_1 - I_2} = 1,5 \text{ A.}$$

Ответ: 1,5.