7-9 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Набор задач для самостоятельного решения к занятию «теплопроводность и закон Фурье; установившееся распределение температур».

Задача 1 (1 балл) [теплопередача, закон Фурье]
Три раскаленные после отлива стальные «болванки» имели одинаковую температуру. На первую из них уже через минуту вылили тонкой струйкой 20 л холодной воды, и вся она испарилась. На вторую еще через 5 минут вылили столько же воды с такой же начальной температурой, и она тоже испарилась полностью. И даже когда спустя еще 5 минут столько такой же воды вылили на третью болванку, вода тоже испарилась полностью, пусть и не так быстро. Теплоемкость болванки можно считать постоянной (не зависящей от температуры). Выберите из предложенных вариантов правильное соотношение между температурами болванок после испарения третьей порции воды:

(1) $t_1 < t_2 < t_3$
(2) $t_1 > t_2 > t_3$
(3) $t_2 < t_1 < t_3$
(4) $t_1 > t_3 > t_2$
(5) $t_1 < t_3 < t_2$
(6) $t_2 > t_1 > t_3$
(7) $t_1 = t_2 = t_3$

В ответе запишите номер выбранного варианта.

Подсказка 1: На нагрев всей воды до температуры кипения и ее полное испарение требуется всегда одно и то же количество теплоты.
Подсказка 2: Чем раньше произойдет «обливание», тем меньше будет средняя разность температур болванки и окружающей среды в течении рассматриваемого времени.

Решение:

На нагрев всей воды до температуры кипения и ее полное испарение требуется всегда одно и то же количество теплоты. Так как теплоемкость считается постоянной, то вода понижает температуру болванки на определенную величину. Чем раньше это произойдет, тем меньше будет средняя разность температур болванки и окружающей среды в течении рассматриваемого времени, и тем меньше будут тепловые потери за счет теплопроводности (можно также отметить, что заодно уменьшаются и потери на тепловое излучение, которые тоже растут с ростом температуры). Следовательно, при более раннем «обливании» итоговая температура оказывается выше. Значит, правильный вариант – №2: $t_1 > t_2 > t_3$.

Ответ: 2.

Задача 2 (2 балла) [теплопередача, закон Фурье]
Количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой вещества постоянного сечения, прямо пропорционален разности температур по разные стороны от него и обратно пропорционален толщине слоя. Допустим, что два слоя теплоизоляции изготовлены из одного материала, но внешний имеет в три раза меньшую толщину и в два раза большую площадь. Между слоями, внутри и снаружи – вещество, которое очень хорошо проводит тепло. Температура внутри равна $t_1 = 11°C$, а снаружи $t_2 = 4°C$. Какова температура вещества между слоями? Ответ запишите в °C, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Так как вещество между слоями «очень хорошо проводит тепло», то его температуру t можно считать почти постоянной.

Подсказка 2: В установившемся режиме поток тепла (количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой теплоизоляции) должен быть одинаков для обоих слоев.

Подсказка 3: Значит, $(t_1 - t)\frac{S}{d} = (t - t_2)\frac{2S}{d/3}$.

Решение:

Так как вещество между слоями «очень хорошо проводит тепло», то его температуру t можно считать почти постоянной. Рассмотрим установившийся режим. В нем поток тепла (количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой теплоизоляции) должен быть одинаков для обоих слоев (иначе температура вещества между слоями изменялась бы). Поэтому $(t_1 - t)\frac{S}{d} = (t - t_2)\frac{2S}{d/3} \Rightarrow (t_1 - t) = 6(t - t_2)$. Из этого соотношения находим, что $t = \frac{3t_1 + 6t_2}{7} = 5°C$.

Ответ: 5.

Задача 3 (3 балла) [теплопередача, закон Фурье]

Собираясь на соревнования, школьник взял с собой упаковку бутербродов в сумке с теплоизолирующими стенками и с электронным датчиком внутренней и внешней температуры. Бутерброды он положил в сумку из холодильника, где рядом с ними стояла кружка с водой, в которой плавала маленькая льдинка (школьник вел за ней наблюдения по заданию учителя физики, но льдинка не росла). По показаниям датчика он определил, что за время сборов $\tau = 3$ минуты внутренняя температура возросла на $\Delta t = 0{,}3°C$ при неизменной внешней температуре $t_0 = 25°C$. Когда он пришел на соревнования, внутренняя температура равнялась $t_1 = 7°C$, а внешняя – $t_0' = 27°C$. За какое время после этого внутренняя температура возрастет еще на $\Delta t' = 0{,}5°C$, если внешняя температура меняться не будет? Ответ запишите в секундах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Из условия ясно, что температура в холодильнике $t = 0°C$.

Подсказка 2: Скорость поступления тепла в сумку в первом случае была пропорциональна $t_0 - t = 25°C$, а во втором $t_0' - t_1 = 20°C$ с тем же коэффициентом пропорциональности.

Подсказка 3: Для нагрева содержимого сумки на $\Delta t' = 0{,}5°C$ нужно в $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{5}{3}$ раза больше тепла, чем для нагрева на $\Delta t = 0{,}3°C$.

Решение:

Из условия ясно, что температура в холодильнике $t = 0°C$. Поэтому скорость поступления тепла в сумку в первом случае была пропорциональна $t_0 - t = 25°C$. На соревнованиях эта скорость была пропорциональна $t_0' - t_1 = 20°C$ с тем же коэффициентом пропорциональности. Для нагрева содержимого сумки на $\Delta t' = 0{,}5°C$ нужно в $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{5}{3}$ раза больше тепла, чем для нагрева на $\Delta t = 0{,}3°C$. Поэтому $\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\frac{t_0 - t}{t_0' - t_1} = \frac{25}{12}$, то есть $\tau' = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\frac{t_0 - t}{t_0' - t_1}\tau = 6\frac{1}{4}$ мин. То есть 375 с.

Ответ: 375.

Задача 4 (3 балла) [теплопередача, закон Фурье, тепловой баланс]

В тонкостенную металлическую кастрюлю налили воду с температурой +2°С,закрыли крышкой и поставили ее в морозильную камеру, в которой поддерживалась температура ниже -35°С. Через 2 минуты вода в кастрюле начала замерзать. Какая часть массы воды превратится в лед за 20 минут после этого? Удельная теплоемкость воды $c \approx 4{,}2$ Дж/(г·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 336$Дж/г. Ответ дайте в процентах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Во время замерзания льда температура внутри кастрюли не изменялась, и тепло, поступающее в кастрюлю, шло только на отвердевание льда.
Подсказка 2: Это значит, что $20Q_1 = \lambda \cdot nm$(здесь Q_1 – количество теплоты, уходящее из кастрюли за 1 мин при постоянной внутренней температуре 0°С, а m – начальная масса воды).
Подсказка 3: На стадии остывания воды до 0°С мы можем с хорошей точностью считать, что мощность теплоотвода соответствовала средней разности температур, которая не очень значительно (на 1°С, то есть менее чем на 3%) отличалась от той, что была на стадии замерзания льда.

Решение:

Пусть n – искомая доля льда. Во время замерзания льда температура внутри кастрюли не изменялась, и тепло, поступающее в кастрюлю, шло только на отвердевание льда, то есть $20Q_1 = \lambda \cdot nm$(здесь Q_1 – количество теплоты, уходящее из кастрюли за 1 мин при постоянной внутренней температуре 0°С, а m – начальная масса воды). На стадии остывания воды до 0°С мы можем с хорошей точностью считать, что мощность теплоотвода соответствовала средней разности температур, которая не очень значительно (на 1°С, то есть менее чем на 3%) отличалась от той, что была на стадии замерзания льда. Следовательно, $Q_1 \approx cm\Delta t$. Разделив эти соотношения друг на друга, найдем: $n = \dfrac{20c\Delta t}{\lambda} = 0{,}5$. Итак, масса льда составит 50% от начальной массы воды.

Ответ: 50.

Задача 5 (4 балла) [теплопередача, закон Фурье]

Медный провод, по которому можно пропускать электрический ток, проложили в массивном образце из хорошо проводящего тепло вещества, температуру которого можно регулировать. Провод отделили от вещества слоем изоляции, толщина которого намного меньше радиуса провода. При пропускании тока с силой 1 А для поддержания в течении длительного времени температуры провода, равной 20°С, было необходимо поддерживать температуру образца равной 18°С. Затем толщину слоя изоляции увеличили в два раза (не меняя материала), и стали пропускать по проводу ток с силой 2 А. Какой должна быть температура образца, чтобы температура провода осталась прежней? Ответ запишите в градусах Цельсия, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: В установившемся режиме мощность выделения тепла за счет протекания тока должна равняться мощности теплоотвода от него.
Подсказка 2: Мощность выделения тепла за счет протекания тока с силой I равна $P = I^2R$, где R – сопротивление провода при заданной температуре.
Подсказка 3: Мощности теплоотвода $P = \kappa S\dfrac{t - t_0}{d}$, где κ - коэффициент теплопроводности материала изоляции, S – площадь боковой поверхности провода, d – толщина изоляции, t – температура провода, t_0 – температура образца.

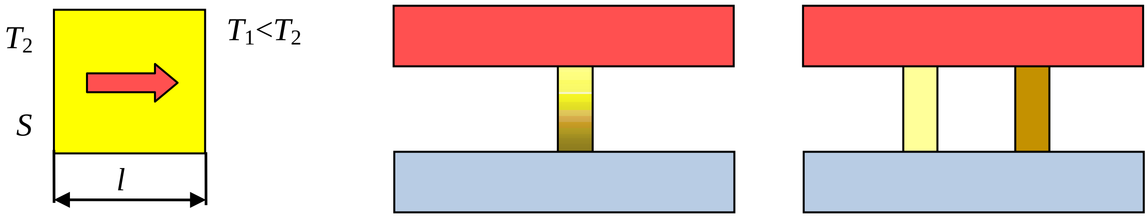
Решение:

В установившемся режиме мощность выделения тепла за счет протекания тока $P = I^2R$ (где R – сопротивление провода при заданной температуре) должна равняться мощности теплоотвода от него $P = \kappa S \frac{t - t_0}{d}$. Здесь κ - коэффициент теплопроводности материала изоляции, S – площадь боковой поверхности провода, d – толщина изоляции, t – температура провода, t_0 – температура образца. Таким образом, в первом случае $I^2 R = \kappa S \frac{t - t_0}{d}$, а во втором $(2I)^2 R = \kappa S \frac{t - t_0'}{2d}$. Разделив эти соотношения друг на друга, находим:

$$8(t - t_0) = t - t_0' \Rightarrow t_0' = 8t_0 - 7t = 4°\mathrm{C}.$$

Ответ: 4.

Задача 6 (6 баллов) [теплопередача, закон Фурье]
(«**Тепловые резисторы**») Как известно, одним из способов теплообмена является *теплопроводность*. В этом механизме теплота передается благодаря межмолекулярным взаимодействиям от более горячих областей тел к более холодным. Количество теплоты δQ, протекающее за время δt через объем вещества с площадью поперечного сечения S, прямо



пропорционально разности температур $\Delta T = T_2 - T_1$ и обратно пропорционально расстоянию l (см. рисунок слева): $\delta Q = \kappa \cdot \frac{S\,\Delta T}{l} \delta t$. Коэффициент пропорциональности κ зависит от вещества и называется *коэффициентом теплопроводности*. Допустим, что у нас есть 100 разных веществ, коэффициенты теплопроводности которых отличаются друг от друга на 5% (у первого вещества это κ, у второго – $1{,}05 \cdot \kappa$, у третьего – $(1{,}05)^2 \cdot \kappa$ и так далее. Из одинаковых по высоте цилиндрических слоев всех этих веществ (одинакового сечения, по одному слою для каждого вещества) склеили цилиндр и вставили его между двумя параллельными поверхностями веществ, одно из которых горячее другого (центральный рисунок). Слои «клея» такие тонкие, что не влияют на теплопроводность. Второй раз между этими поверхностями при той же разности их температур вставили два цилиндра такого же сечения и длины, один из которых целиком изготовлен из первого вещества, а второй – из сотого (правый рисунок). Во сколько раз переданное за секунду тепло во втором случае больше, чем в первом (разность температур поддерживается неизменной в течении достаточно долгого времени). Объем между поверхностями вакуумирован, излучением можно пренебречь.
Примечание: Вы легко можете доказать, а потом использовать алгебраическое тождество: $1 - q^N = (1-q)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{N-1})$.

Ответ запишите с точностью до десятых.

Подсказка 1: Для «слоистого» цилиндра в установившемся режиме поток тепла ($\frac{\delta Q_1}{\delta t}$) одинаков для всех слоев.

Подсказка 2: Поэтому изменение температуры на *n*-ом слое $\delta T_n = \frac{\delta l}{S \kappa_n} \cdot \frac{\delta Q_1}{\delta t}$ (где $\delta l = \frac{l}{N}$ - толщина слоя).
Подсказка 3: При суммировании этих разностей для получения полной разности температур концов цилиндра нужно использовать тождество из «Примечания» в условии.

Решение:

Рассмотрим сначала поток через «слоистый» цилиндр. В установившемся режиме поток тепла ($\frac{\delta Q_1}{\delta t}$) одинаков для всех слоев. Пусть δT_n - изменение температуры в n-ом слое с коэффициентом теплопроводности $\kappa_n = \kappa \cdot (1{,}05)^{n-1}$. Из сообщенного в условии *закона Фурье* следует, что $\delta T_n = \frac{\delta l}{S\kappa_n} \cdot \frac{\delta Q_1}{\delta t}$ (где $\delta l = \frac{l}{N}$ - толщина слоя). Суммируя все эти изменения от первого до последнего (N -го) слоя, получим полную разность температур между поверхностями: $\Delta T = \frac{l}{S\kappa N} \cdot \frac{\delta Q_1}{\delta t}\left[1 + \left(\frac{1}{1{,}05}\right) + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{N-1}\right]$. С учетом алгебраического тождества, которое упоминалось в примечании, сумма в скобке равна $\left[1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^N\right] / \left[1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)\right] = 21\left[1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^N\right]$. Следовательно, с учетом того, что $N = 100$:

$$\frac{\delta Q_1}{\delta t} = \frac{S\kappa\Delta T}{l}\frac{100}{21}\left[1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}\right]^{-1} \approx 4{,}7257 \cdot \frac{S\kappa\Delta T}{l}.$$

Во втором случае общий поток есть сумма потоков через два цилиндра:

$$\frac{\delta Q_2}{\delta t} = \frac{S\kappa_1\Delta T}{l} + \frac{S\kappa_{100}\Delta T}{l} = \frac{S\kappa\Delta T}{l}[1 + (1{,}05)^{99}] \approx 126{,}2393 \cdot \frac{S\kappa\Delta T}{l}.$$

В результате получаем, что во втором случае за секунду действительно передается больше тепла, чем в первом, в $x = \frac{21}{100}[1 + (1{,}05)^{99}]\left[1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}\right] \approx 26{,}7$ раза. Если в процессе вычислений пренебрегать 1 по сравнению с $(1{,}05)^{99}$ и $\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{100}$ по сравнению с 1, то ошибка будет не очень большой: $x \approx \frac{21}{100}(1{,}05)^{99} \approx 26{,}3$.

Можно также решать эту задачу, используя аналогию между законом Ферми для теплопроводности и законом Ома для электрического тока, согласно которому заряд δQ, протекающее за время δt через объем вещества длиной l с площадью поперечного сечения S, пропорционален напряжению (разности потенциалов): $\delta Q = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{SU}{l}\delta t$. Здесь роль теплопроводности играет величина, обратная удельному сопротивлению ρ («удельная проводимость»), а роль разности температур – напряжение. Таким образом, наша задача аналогична задаче о последовательном и параллельном соединении резисторов: в первом случае у нас цепочка 100 последовательно соединенных резисторов, а во втором – два параллельно соединенных, и отношение токов равно обратному соотношению «сопротивлений».

Ответ: 26,3.