

**7-9 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Робофест» по физике**

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 3 (23.01.2018).

Тема: «ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ. СОУДАРЕНИЯ.»

Задача 1 (3 балла) [закон сохранения импульса, неупругое соударение, закон сохранения энергии]

Два небольших шарика из пластилина подвешены на легких нитях одинаковой длины, так, что они слегка касаются друг друга. Один из них (массой m) отвели от вертикали на натянутой нити так, что он поднялся на высоту $h=35$ см и отпустили без начальной скорости. После его лобового удара о другой шарик (массой M) они слиплись и далее двигались вместе. Высота максимального подъема их от положения равновесия при этом оказалась равной $h'=6$ см. Найти отношение масс шариков $\frac{M}{m} = ?$ Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до десятых. Сопротивлением воздуха пренебречь. Длина каждой нити больше 40 см.

Подсказка 1: закон сохранения энергии для движения первого шара от отпускания до удара

дает: $mgh = \frac{mv^2}{2}$.

Подсказка 2: закон сохранения импульса при неупругом ударе шаров $mv = (m+M)V$.

Подсказка 3: закон сохранения энергии для движения слипшихся шаров от удара до

остановки: $\frac{(m+M)V^2}{2} = (m+M)gh'$.

Решение:

Условие, что длина каждой нити больше 40 см, позволяет считать нити всегда натянутыми (при подъеме выше длины нити нить после отпускания сразу бы провисла). Запишем законы сохранения для разных процессов: закон сохранения энергии для движения первого шара от

отпускания до удара: $mgh = \frac{mv^2}{2}$ (здесь v - скорость шара перед ударом); закон сохранения

импульса при неупругом ударе (закон сохранения механической энергии не работает!): $mv = (m+M)V$; закон сохранения энергии для движения слипшихся шаров от удара до

остановки: $\frac{(m+M)V^2}{2} = (m+M)gh'$. Исключая скорости из этих соотношений, получаем:

$$m\sqrt{h} = (m+M)\sqrt{h'}. \text{ Отсюда выражаем искомую величину: } \frac{M}{m} = \sqrt{\frac{h}{h'}} - 1 \approx 1,415.$$

ОТВЕТ: 1,4.

Задача 2 (4 балла) [упругое соударение, выбор системы отсчета, закон сохранения энергии]

Два небольших по размеру шарика имеют очень разные массы (один очень сильно тяжелее другого). Их подвесили рядом (они слегка касаются друг друга) на невесомых нерастяжимых нитях. Потом развели их в стороны на натянутых нитях так, что оба оказались на высоте $h=10$ см над положением равновесия, и отпустили без начальной скорости. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти высоту максимального подъема легкого шарика. Длина каждой из нитей более 1 м. Ответ запишите в сантиметрах в виде целого числа.

Подсказка 1: закон сохранения энергии для движения любого из шаров от отпускания до удара дает: $mgh = \frac{mv^2}{2}$.

Подсказка 2: «очень тяжелый» шар играет роль «стенки», на которую легкий шар падает «нормально».

Подсказка 3: столкновение нужно рассматривать в системе отсчета, связанной со «стенкой», и в этой СО скорость падения «легкого» шара на «стенку» равна $v' = 2\sqrt{2gh}$.

Решение:

Запишем закон сохранения энергии для движения любого из шаров от отпускания до удара:

$mgh = \frac{mv^2}{2}$ (здесь v - скорость шара перед ударом). Как видно, $v = \sqrt{2gh}$. Поскольку масса

сократилась, то этот результат справедлив для обоих шаров. При описании столкновения нам нужно перейти в систему отсчета, связанную со «стенкой» (роль которой играет очень тяжелый шар). В ней легкий шар налетает на «стенку» со скоростью $v' = 2\sqrt{2gh}$. Так как удар лобовой (падение на «стенку» нормальное), то после удара в этой системе отсчета легкий шар будет двигаться с такой же по величине скоростью, но в другую сторону. Возвращаясь в исходную систему отсчета, обнаруживаем, что относительно Земли легкий шар после удара начинает обратное движение со скоростью $V = 3\sqrt{2gh}$. Максимальная

высота его подъема находится из новой записи закона сохранения энергии: $mgH = \frac{mV^2}{2}$,

откуда $H = 9h = 90\text{см}$. Так как это меньше длины нити, то шарик действительно поднимается на эту высоту (нить «по дороге» не провисает и не достигает положения «вертикально вверх»).

ОТВЕТ: 90.

Задача 3 (4 балла) [закон сохранения энергии, закон сохранения импульса]

Опираясь на борт катка, мальчик бросил камень горизонтально со скоростью $u_1 = 5\text{м/с}$. Какова будет скорость того же камня относительно мальчика сразу после второго броска, который мальчик совершил, стоя на гладком льду? Во второй раз камень также вылетел горизонтально, и мальчик совершил в точности прежнюю работу. Масса мальчика $M = 50\text{кг}$, масса камня $m = 1\text{кг}$, трением о лед пренебречь. Ответ выразить в м/с, округлив до сотых.

Подсказка 1: для первого броска можно пренебречь отдачей и считать, что вся совершенная мальчиком работа пошла на увеличение кинетической энергии камня.

Подсказка 2: при записи закона сохранения горизонтальной компоненты импульса для второго броска следует учесть отдачу: если скорость мальчика после броска будет равна V , то величина скорости камня относительно льда будет равна $u_2 - V$.

Подсказка 3: при втором броске работа мальчика идет на увеличение кинетической энергии всей системы: например, если ее вычислять в СО, связанной со льдом, то

$$A = \frac{m(u_2 - V)^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

Решение:

При описании первого броска можно пренебречь отдачей и считать, что вся совершенная мальчиком работа пошла на увеличение кинетической энергии камня, то есть что $A = \frac{mu_1^2}{2}$.

При описании второго броска обозначим V скорость, приобретаемую мальчиком вследствие отдачи, а u_2 – искомую скорость. Тогда из закона сохранения горизонтальной компоненты импульса: $MV = m(u_2 - V) \Rightarrow V = \frac{m}{M + m}u_2$. Увеличение механической энергии системы

происходит за счет работы мальчика: $A = \frac{m(u_2 - V)^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{mMu_2^2}{2(M+m)}$. Сопоставляя

выражения для работы, получаем: $u_2 = u_1 \sqrt{1 + \frac{m}{M}} \approx 5,05 \text{ м/с}$.

ОТВЕТ: 5,05.

Задача 4 (3 балла) [закон сохранения импульса, неупругое соударение]

Две шайбы с массами $m_1 = 100 \text{ г}$ и $m_2 = 400 \text{ г}$, скользящие по гладкому льду со скоростями $v_1 = 3 \text{ м/с}$ и $v_2 = 1 \text{ м/с}$ во взаимно-перпендикулярных направлениях, столкнулись и «склеились» благодаря специальному составу, нанесенному на боковые поверхности. Найти скорость центра масс образовавшейся «двойной» шайбы после удара. Ответ запишите в м/с, при необходимости округлив до целого значения.

Подсказка 1: удар шайб абсолютно неупругий, и надо использовать закон сохранения импульса.

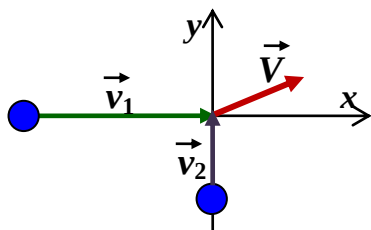
Подсказка 2: закон сохранения импульса удобно записать в проекциях на оси, направленные вдоль скоростей шайб до удара, либо непосредственно в векторной форме.

Подсказка 3: в проекциях на эти оси он имеет вид
$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_x \\ m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_y \end{cases}$$

Решение:

Здесь удар абсолютно неупругий. Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси, направленные вдоль скоростей шайб до удара:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_x \\ m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \\ V_y = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} = 1 \text{ м/с}.$$



ОТВЕТ: 1.

Задача 5 (4 балла) [закон сохранения импульса, неупругое соударение, закон сохранения энергии]

Вагонетка, заполненная песком, имеет массу $M = 800 \text{ кг}$. Она катится по горизонтальным рельсам со скоростью $V = 2 \text{ м/с}$. Ей «вдогонку» брошен груз массой $m = 20 \text{ кг}$. Груз падает в вагонетку со скоростью $v = 10 \text{ м/с}$, направленной под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту (вниз, по направлению движения вагонетки). Груз застревает в песке, при этом песок не вылетает из вагонетки, а вагонетка не подскакивает на рельсах. Найти потери механической энергии при ударе. Трением качения пренебречь. Ответ запишите в Джоулях, округлив до целого значения.

Подсказка 1: удар абсолютно неупругий, но есть внешние силы, действующие по вертикали: нужно использовать закон сохранения импульса в проекции на направление движения вагонетки.

Подсказка 2: он имеет вид $MV + mv \cos \alpha = (m + M)V'$.

Подсказка 3: взаимодействие с рельсами тоже неупругое, и энергия движения груза по вертикали теряется.

Решение:

Здесь удар абсолютно неупругий, но система не замкнута: в то время, когда песок тормозит движение груза, увеличивается вертикальная сила нормальной реакции рельс, действующая на вагонетку. Поэтому надо использовать закон сохранения импульса в проекции на горизонталь – на направление движения вагонетки. Он имеет вид $MV + mv \cos \alpha = (m + M)V'$. Поэтому скорость движения вагонетки с грузом по горизонтали $V' = \frac{MV + mv \cos \alpha}{m + M}$. По условию вагонетка не подскакивает, то есть ее

взаимодействие с рельсами тоже неупругое, и энергия движения груза по вертикали теряется. Значит, полная потеря энергии

$$\Delta E = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - \frac{(M + m)V'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \sin^2 \alpha + \frac{mM}{2(M + m)} (V + v \cos \alpha)^2 \approx 122805 \text{ Дж.}$$

ОТВЕТ: 1228.

Задача 6 (5 баллов) [закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, упругое соударение]

На гладком горизонтальном стержне покоятся две упругие шайбы А и В. Третья шайба С (в точности такая же, как В) скользит по стержню и сталкивается с А, после чего А сталкивается с В, и больше соударений нет. Скорость шайбы В после этого оказалась меньше скорости С до начала соударений в $z = 1.8$ раза. Найти отношение масс шайб А и В.

Подсказка 1: первое соударение (С с массой m и А с массой M) можно рассмотреть на базе законов сохранения энергии и импульса либо с помощью перехода в систему центра масс, и

в любом случае скорости этих шайб после соударения
$$\begin{cases} v_1 = \frac{m - M}{M + m} v_0 \\ V_1 = \frac{2m}{M + m} v_0 \end{cases}, \text{ где } v_0 - \text{начальная}$$

скорость шайбы С.

Подсказка 2: второе соударение (А и В) описывается точно так же, и соотношение скоростей

$$z = \frac{(M + m)^2}{4Mm}.$$

Подсказка 3: из полученного уравнения можно найти соотношение масс, причем только один из корней удовлетворяет условию, что второе соударение будет последним.

Решение:

Пусть $m_B = m_C \equiv m$, $m_A \equiv M$, а начальная скорость шайбы С равна v_0 . Тогда после первого соударения (шайбы С с шайбой А) скорости шайб стали равны (здесь и далее скорости записываются в проекции на ось, направленную вдоль стержня по направлению первоначального движения шайбы С):

$$\left\{ \begin{array}{l} mv_0 = mv_1 + MV_1 \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV_1^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{m - M}{M + m} v_0 \\ V_1 = \frac{2m}{M + m} v_0 \end{array} \right.$$

Аналогично рассматривая столкновение А с В, найдем, что скорость шайбы В после этого соударения

$$v_2 = \frac{2M}{M + m} V_1 = \frac{4Mm}{(M + m)^2} v_0.$$

По условию $\frac{v_0}{v_2} = z \Rightarrow \frac{(M+m)^2}{4Mm} = z \Rightarrow \left(\frac{M}{m}\right)^2 - 2(2z-1)\frac{M}{m} + 1 = 0$. Таким образом, для отношения масс получаются два значения

$$\frac{M}{m} = 2z - 1 \pm 2\sqrt{z(z-1)} = 2,6 \pm 2,4.$$

Нетрудно, однако, заметить, что меньшее значение $\frac{M}{m} = \frac{1}{5}$ соответствует ситуации, когда шайба С после соударения продолжает двигаться в первоначальном направлении, а шайба А после удара о В движется ей навстречу, и поэтому соударение А с В явно не будет последним. Поэтому условию задачи отвечает только один корень

$$\frac{M}{m} = 5.$$

ОТВЕТ: 5.

Задача 7 (4 балла) [закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, неупругое соударение]

Шар налетает со скоростью $v_0 = 4$ м/с на покоящийся шар вдвое большей массы. Происходит лобовое **частично неупругое** соударение, в результате которого $\alpha = 50\%$ начальной кинетической энергии переходит в тепло. Найти скорость первоначально покоившегося шара после соударения. Ответ выразить в м/с.

Подсказка 1: уравнения, следующие из законов сохранения, имеют вид:

$$\begin{cases} mv_0 = mv + 2mV \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mV^2}{2} + Q \end{cases}$$

Подсказка 2: из этих уравнений можно исключить скорость налетающего шара после соударения v .

Подсказка 3: из двух корней получающегося уравнения для искомой скорости V нужен тот, который при $\alpha = 0$ перейдет в «стандартный» результат для упругого лобового соударения

$$V|_{\alpha=0} = \frac{2m}{m+2m}v_0 = \frac{2v_0}{3}.$$

Решение:

Законы сохранения импульса (в проекции на направление движения налетающего шара) и энергии (с учетом перехода части механической энергии в тепло) здесь приводят к соотношениям:

$$\begin{cases} mv_0 = mv + 2mV \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mV^2}{2} + Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = v_0 - 2V \\ v^2 + 2V^2 + \frac{2Q}{m} - v_0^2 = 0 \end{cases}$$

С учетом того, что по условию $Q = \alpha \frac{mv_0^2}{2}$, из этих уравнений получаем:

$$(v_0 - 2V)^2 + 2V^2 + (\alpha - 1)v_0^2 = 0 \Rightarrow V^2 - \frac{2v_0}{3}V + \frac{\alpha}{6}v_0^2 = 0.$$

Отметим, что нам нужен тот корень этого уравнения, который при $\alpha = 0$ перейдет в «стандартный» результат для упругого лобового соударения $V|_{\alpha=0} = \frac{2m}{m+2m}v_0 = \frac{2v_0}{3}$, то

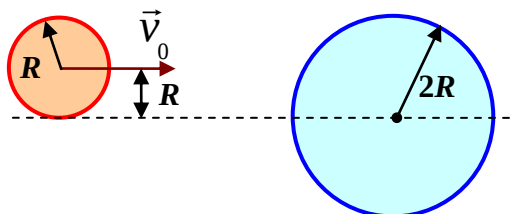
есть $V = \frac{v_0}{3} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{3}{2}\alpha} \right] = 2$ м/с. Второй корень при $\alpha = 0$ превращается в ноль, то есть в

«нефизический» результат, соответствующий сохранению прежних скоростей (то есть отсутствию взаимодействия при столкновении).

ОТВЕТ: 2.

Задача 8 (6 баллов) [закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, упругое соударение, косой удар]

Упругая гладкая цилиндрическая шайба радиуса R скользит по гладкой горизонтальной поверхности и налетает на покоящуюся шайбу такой же высоты и радиуса $2R$, изготовленную из того же материала. При этом расстояние от линии, вдоль которой движется центр налетающей шайбы, до центра покоящейся в точности равно R . Происходит абсолютно упругий удар. Во сколько раз уменьшится скорость налетающей шайбы в результате соударения? Ответ запишите в виде десятичной дроби, округлив до десятых.



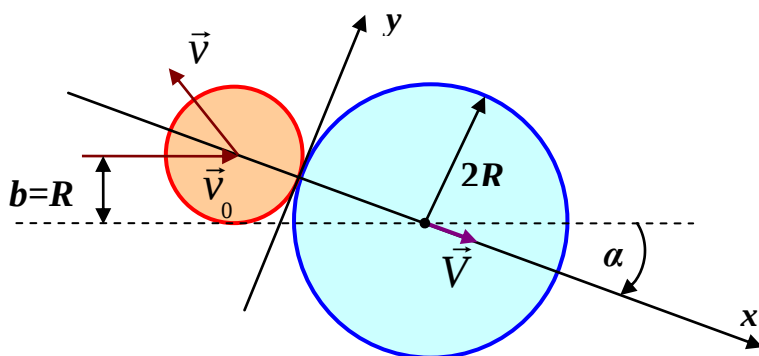
Подсказка 1: так как силы трения между шайбами нет, то покоящаяся шайба начнет двигаться по линии удара, которая совпадает с прямой, проходящей через центры шайб в момент соударения, то есть под углом $\alpha = \arcsin(1/3)$ к скорости налетающей шайбы.

Подсказка 2: удобно анализировать соударение в проекциях на линию удара и перпендикуляр к ней.

Подсказка 3: задача для компонент скоростей вдоль линии удара полностью аналогична «стандартной» задаче о лобовом упругом соударении.

Решение:

Пусть масса налетающей шайбы равна m . Тогда масса покоящейся, очевидно, равна $4m$. Так как силы трения между шайбами нет, то покоящаяся шайба начнет двигаться по линии удара, которая совпадает с прямой, проходящей через центры шайб в момент соударения.



Удобно анализировать соударение в проекциях на эту линию (ось x) и перпендикуляр к ней (ось y , как показано на рисунке). Обозначим α угол между линией удара и направлением начального движения шайбы. Из геометрического анализа видно, что $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Так как силы, действующие на шайбы, направлены вдоль оси x , то в проекции на ось y компоненты скорости шайб не изменяются, то есть $v_y = v_0 \sin \alpha = \frac{1}{3}v_0$, $V_y = 0$. Задача для x -компонент скоростей полностью аналогична «стандартной» задаче о лобовом упругом соударении:

$$\left\{ \begin{array}{l} m v_0 \cos \alpha = m v_x + 4m V_x \\ \frac{m(v_0 \cos \alpha)^2}{2} = \frac{m v_x^2}{2} + \frac{4m V_x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{m-4m}{m+4m} v_0 \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{5} v_0 \\ V_x = \frac{2m}{m+4m} v_0 \cos \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{15} v_0 \end{array} \right.$$

Таким образом, конечная скорость налетающей шайбы $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{2\sqrt{26}}{15} v_0$, и

$$\frac{v_0}{v} = \frac{15}{2\sqrt{26}} \approx 1,47.$$

ОТВЕТ: 1,5.

Задача 9 (5 баллов) [закон сохранения импульса, закон сохранения энергии, движение в поле тяжести]

Снаряд, выпущенный из орудия под углом к горизонту над плоским горизонтальным участком земной поверхности, взорвался в верхней точке траектории. При этом образовались два осколка. Первый из них упал на землю спустя время t_1 , которое оказалось ровно в два раза меньше, чем время полета снаряда от выстрела до взрыва, а второй – спустя время t_2 , которое оказалось ровно в два раза больше времени полета. Найти отношение масс осколков. Сопротивлением воздуха и массой пороховых газов пренебречь.

Подсказка 1: время подъема снаряда до верхней точки $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, а высота подъема

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \text{ где } v_0 \text{ и } \alpha - \text{начальная скорость и угол вылета снаряда.}$$

Подсказка 2: время падения каждого осколка определяется только вертикальной составляющей его скоростей сразу после взрыва u из уравнения $h + ut - \frac{gt^2}{2} = 0$.

Подсказка 3: закон сохранения вертикальной составляющей импульса при взрыве имеет вид $0 = m_1 u_1 + m_2 u_2$.

Решение:

Во время полета от выстрела до взрыва ускорение снаряда было равно ускорению свободного падения, поэтому время подъема снаряда до верхней точки $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, где v_0 и

α - начальная скорость и угол вылета снаряда соответственно. Высота подъема определяется из закона сохранения энергии: поскольку скорость в верхней точке направлена по горизонтали и равна $v_0 \cos \alpha$, то $\frac{m v_0^2}{2} = mgh + \frac{m v_0^2 \cos^2 \alpha}{2} \Rightarrow h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. Времена падений осколков определяются только вертикальными составляющими их скоростей сразу

после взрыва u (ускорения осколков одинаковы и равны g): $h + ut - \frac{gt^2}{2} = 0$. Из этого

уравнения находим его положительный корень: $t = \frac{u}{g} + \sqrt{\frac{u^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$. Значит, по заданным

временам можно найти вертикальные составляющие скоростей осколков сразу после взрыва

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{u_1}{g} + \sqrt{\frac{u_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = \frac{t}{2} \\ t_2 = \frac{u_2}{g} + \sqrt{\frac{u_2^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = 2t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\frac{3}{4}gt = -\frac{3}{4}v_0 \sin \alpha \\ u_2 = +\frac{3}{4}gt = +\frac{3}{4}v_0 \sin \alpha \end{array} \right.$$

Как видно, они в точности противоположны друг другу. Из закона сохранения вертикальной составляющей импульса при взрыве: $0 = m_1 u_1 + m_2 u_2$ найдем, что $\frac{m_1}{m_2} = -\frac{u_2}{u_1} = 1$.

Ответ: 1.