

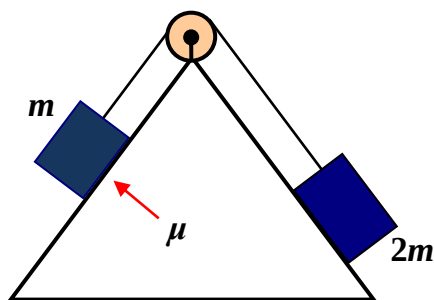
7-9 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Роботфест» по физике

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 2 (16.01.2018).

Тема: «РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. РОЛЬ СИЛ ТРЕНИЯ.»

Задача 1 (2 балла) [уравнение движения, условие кинематической связи, силы]

Клин в виде треугольной призмы установлен так, что его основание горизонтально. Сечение призмы – равнобедренный треугольник высотой $H = 40$ см и шириной основания $D = 60$ см (см. рисунок). На вершине клина установлен идеальный блок, через который перекинута невесомая и нерастяжимая нить. На концах нити прикреплены два груза с массами m и $2m$, лежащие на боковых поверхностях клина и находящиеся в одной вертикальной плоскости с блоком. «Правая» боковая поверхность клина гладкая, а коэффициент трения груза m о «левую» боковую поверхность $\mu = 0,5$. С каким ускорением начнет двигаться груз m после отпускания системы? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с². Ответ запишите в м/с² с точностью до сотых.



Подсказка 1: всякое смещение груза m вверх по левой боковой поверхности клина вызовет такое же по величине смещение груза $2m$ вниз по правой боковой поверхности.

Подсказка 2: величина ускорения равна отношению равнодействующей проекций всех сил на направление движения к общей массе системы.

Подсказка 3: из значений высоты и ширины основания находим, что для угла наклона боковых поверхностей клина к горизонту $\sin(\alpha) = 0,8$ и $\cos(\alpha) = 0,6$.

Решение:

Из геометрии системы ясно, что всякое смещение груза m вверх по левой боковой поверхности клина вызовет такое же по величине смещение груза $2m$ вниз по правой боковой поверхности. Значит, величины их ускорений всегда равны (уравнение связи $a_2 = a_1$). Следовательно, величина ускорения равна отношению равнодействующей проекций всех сил на направление движения к общей массе системы. Груз $2m$ тянет вниз вдоль плоскости проекция силы тяжести $F_2 = 2mg\sin(\alpha)$. (α – угол наклона боковых поверхностей к горизонту). Движению груза m вверх препятствуют проекция силы тяжести и сила трения скольжения: $F_1 = -mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)$. Обратим внимание, что сила нормальной реакции для груза m уравнивает перпендикулярную поверхности компоненту силы тяжести, то есть $mg\cos(\alpha)$. Итак, величина ускорения

$$a = \frac{2mg\sin(\alpha) - mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)}{m + 2m} = \frac{g}{3}[\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)].$$

Из значений высоты и ширины основания находим, что для угла α :

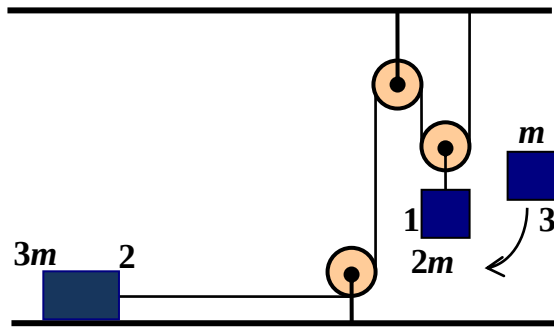
$$\left. \begin{array}{l} \sin(\alpha) = 0,8 \\ \cos(\alpha) = 0,6 \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{g}{3}[0,8 - 0,5 \cdot 0,6] = \frac{g}{6} \approx 1,67 \text{ м/с}^2.$$

ОТВЕТ: 1,67.

Задача 2 (3 балла) [уравнение движения, условие кинематической связи, силы]

В системе, показанной на рисунке, нить невесомая и нерастяжимая, а блоки идеальны. Груз 1, прикрепленный к подвижному блоку, и имеет $2m$, груз 2, помещенный на гладкой

горизонтальной поверхности – массу $3m$. Все участки нити, не лежащие на блоках, горизонтальны либо вертикальны. Тела удерживают, а затем отпускают, и измеряют ускорение груза 1 (a_1). Затем к грузу 1 прикрепляют груз 3 с массой m , и повторяют опыт, снова измеряя ускорение груза 1 (a'_1). Найти отношение $\frac{a'_1}{a_1}$ с точностью до десятых.



Подсказка 1: Нужно записать уравнения движения грузов в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси, с учетом силы натяжения нити.

Подсказка 2: Условие кинематической связи ускорений грузов имеет вид: $a_2 = 2a_1$.

Подсказка 3: Удобно провести вычисления для произвольного значения массы груза, прикрепленного к подвижному блоку.

Решение:

Поскольку нам нужны вычисления для разных значений массы груза, прикрепленного к подвижному блоку, обозначим эту массу M . Запишем уравнения движения (для 1 – в проекции на ось, направленную вертикально вниз, для груза 2 – в проекции на ось, направленную горизонтально «вправо»):

$$\begin{cases} Ma_1 = Mg - 2T \\ 3ma_2 = T \end{cases}$$

(здесь T – сила натяжения нити). Кроме того, всякое смещение груза 1 вниз на Δx_1 вызовет смещение груза 2 на $\Delta x_2 = 2\Delta x_1$ вправо, и поэтому $a_2 = 2a_1$. Поэтому $T = 6ma_1$. Подставляя это соотношение в уравнение движения груза 1, находим:

$$Ma_1 = Mg - 12ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{M}{M + 12m}g.$$

Остается подставить это в соотношения массы груза: в первом опыте $M = 2m$, и $a_1 = \frac{1}{7}g$, а во втором опыте $M' = 3m$, и $a'_1 = \frac{1}{5}g$. Следовательно,

$$\frac{a'_1}{a_1} = \frac{7}{5} = 1,4$$

ОТВЕТ: 1,4.

Задача 3 (4 балла) [уравнение движения, равноускоренное движение, сила трения]

Две одинаковые длинные доски покоятся на горизонтальной поверхности, одна на другой (см. рисунок). По нижней доске наносят резкий удар, сообщая ей скорость $v_0 = 4 \text{ м/с}$, направленную по ее осевой линии. Доски пришли в движение. Спустя какое время это движение прекратится? Коэффициент трения между досками, как и коэффициент трения между нижней доской и поверхностью равен $\mu = 0,5$. Доски в течении всего времени движутся поступательно. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Ответ записать в секундах с точностью до десятых.



Подсказка 1: движение нижней доски тормозится двумя силами трения скольжения, а верхней – разгоняется силой трения со стороны нижней.

Подсказка 2: проскальзывание досок прекращается в момент времени, когда их скорости выравниваются.

Подсказка 3: после прекращения взаимного проскальзывания доски продолжают двигаться вместе, как тело массой $2m$, под действием одной тормозящей силы трения.

Решение:

После удара нижняя доска начнет скользить по поверхности, одновременно выскальзывая из-под верхней. Поэтому ее движение тормозится двумя силами трения скольжения. Уравнение движения этой доски вдоль горизонтальной оси $ma_1 = -\mu \cdot 2mg - \mu \cdot mg = -3\mu \cdot mg$ (m – одинаковая масса обеих досок) позволяет найти ее ускорение $a_1 = -3\mu g$. Закон изменения ее скорости $v_1(t) = v_0 - 3\mu gt$. В то же время верхняя доска разгоняется силой трения со стороны нижней, ее ускорение $a_2 = +\mu g$, и $v_2(t) = \mu gt$. Проскальзывание досок прекращается в момент времени t_1 , когда их скорости выравниваются:

$v_0 - 3\mu gt_1 = \mu gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{4\mu g}$. По условию, доски движутся поступательно (верхняя доска

остается горизонтальной). Поэтому далее они продолжают двигаться вместе, как тело массой $2m$, под действием одной тормозящей силы трения, и их общее ускорение $a_{12} = -\mu g$.

Поэтому они остановятся за время $t_2 = \frac{v_0}{4\mu g}$, а общее время движения

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{2\mu g} \approx 0,4 \text{ с.}$$

ОТВЕТ: 0,4.

Задача 4 (4 балла) [уравнение движения, равноускоренное движение, сила трения]

Полноприводной автомобиль массой $m = 600$ кг едет по горизонтальному прямолинейному участку дороги со скоростью $v_1 = 12$ м/с. При этом его колеса не проскальзывают, а полезная мощность двигателя (то есть мощность, передаваемая на оси колес) равна $P_1 = 48$ кВт. Выжав педаль газа, водитель увеличил полезную мощность двигателя в два раза. Колеса начали проскальзывать, но спустя время $t = 1$ с проскальзывание прекратилось. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите коэффициент трения шин о дорогу. Ответ запишите в виде десятичной дроби с точностью до десятых.

Подсказка 1: если колеса не проскальзывают, то сила трения колес меньше силы трения скольжения и связана с мощностью: $P = F_{mp} v \Rightarrow F_{mp} = \frac{P}{v}$.

Подсказка 2: в режиме проскальзывания колес автомобиль движется с постоянным ускорением $a = \frac{\mu mg}{m} = \mu g$.

Подсказка 3: переход от одного режима к другому происходит при «критической» скорости $v_c = \frac{P}{\mu mg}$.

Решение:

Если все колеса одинаковы и нагружены равномерно, то они начинают проскальзывать одновременно. Если колеса не проскальзывают, то сила трения колес меньше силы трения скольжения и связана с мощностью: $P = F_{mp} v \Rightarrow F_{mp} = \frac{P}{v}$. Поскольку $F_{mp} \leq \mu mg$, то разгон

без проскальзывания реализуется при скоростях $v \geq v_c = \frac{P}{\mu mg}$. Таким образом, для нашего

автомобиля $\frac{P_1}{\mu mg} \leq v_1 < \frac{2P_1}{\mu mg}$. В режиме проскальзывания колес автомобиль движется с постоянным ускорением $a = \frac{\mu mg}{m} = \mu g$. Значит, разгон до новой «критической» скорости

$v'_c = \frac{2P_1}{\mu mg}$ продлится в течении времени $t = \frac{1}{\mu g} \left(\frac{2P_1}{\mu mg} - v_1 \right)$. Из этого соотношения получаем

квадратное уравнение относительно коэффициента трения: $\mu^2 + \frac{v_1}{gt} \mu - \frac{2P_1}{mg^2 t} = 0$. Нам нужен

его положительный корень $\mu = -\frac{v_1}{2gt} + \sqrt{\frac{v_1^2}{4g^2 t^2} + \frac{2P_1}{mg^2 t}} \approx 0,8$.

На самом деле этот ответ – заниженная оценка, так как при указанных скоростях пренебрежение силой сопротивления воздуха не очень реалистично. Тем не менее, эта задача позволяет лучше разобраться в роли силы трения в движении машин.

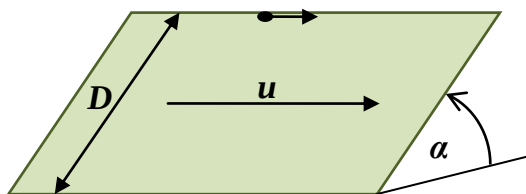
ОТВЕТ: 0,8.

Задача 5 (4 балла) [системы отсчета, уравнение движения, равноускоренное движение, сила трения]

Лента транспортера, движущаяся с постоянной скоростью $u = 1 \text{ м/с}$, наклонена (поперек движения) под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Ширина ленты равна $D = 80 \text{ см}$. На эту ленту запускают у верхнего края маленькую шайбу, начальная скорость которой относительно неподвижного наблюдателя точно равна скорости ленты. На какое расстояние сместится шайба по горизонтали (относительно этого наблюдателя) к тому моменту, когда она достигнет нижнего края ленты? Коэффициент трения между шайбой и лентой равен

$\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,289$. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Ответ

запишите в сантиметрах с точностью до целого значения.



Подсказка 1: для анализа движения шайбы удобно перейти в систему отсчета, связанную с лентой.

Подсказка 2: в этой СО шайба будет скользить вниз по линии «падения воды» под действием сил тяжести, нормальной реакции ленты и трения.

Подсказка 3: ускорение шайбы вдоль этой линии $a'_y = \frac{mg \sin(\alpha) - \mu N}{m} = g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]$.

Решение:

Перейдем в систему отсчета, связанную с лентой (с координатными осями x' и y' – см. рисунок). В ней шайба изначально покоится. Значит, она в этой системе будет скользить вниз по оси y' (то есть $x'(t) \equiv 0$) под действием сил тяжести, нормальной реакции ленты и трения. Ее ускорение вдоль оси y' постоянно и равно

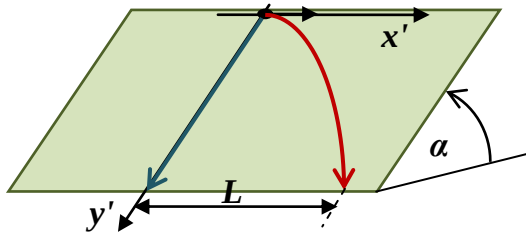
$$a'_y = \frac{mg \sin(\alpha) - \mu N}{m} = \frac{mg \sin(\alpha) - \mu mg \cos(\alpha)}{m} = g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)].$$

Начальная скорость по этой оси равна нулю, так что закон движения

$y'(t) = \frac{g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]t^2}{2}$. Подставляя значение $y'(t) = D$, находим время соскальзывания

до нижнего края ленты: $t = \sqrt{\frac{2D}{g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]}}$. Вернемся в систему отсчета, связанную с неподвижным наблюдателем. Ясно, что для аналогичных координатных осей в этой системе $x(t) = x'(t) + ut$, $y(t) \equiv y'(t)$ (заметим, что из тем самым мы можем определить траекторию шайбы относительно неподвижного наблюдателя, которая оказывается параболой – красная линия на рисунке). Из закона движения по горизонтали находим искомое смещение:

$$L = ut = u \sqrt{\frac{2D}{g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]}} = 0,8 \text{ м, то есть } L = 80 \text{ см.}$$



ОТВЕТ: 80.

Задача 6 (5 баллов) [уравнение движения, сила трения, сила сопротивления воздуха, лобовое сопротивление]

Автомобиль, оснащенный антикрылом, разгоняется по прямой горизонтальной дороге. Сразу после старта его ускорение равно $a_0 = 4 \text{ м/с}^2$. В процессе разгона ускорение автомобиля растет, достигая максимального значения $a_m = 8 \text{ м/с}^2$ при скорости $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Далее ускорение автомобиля убывает. Каким будет его ускорение при скорости $v_1 = 22 \text{ м/с}$? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля, а создаваемая антикрылом прижимающая сила – пропорциональна скорости. Ответ записать в м/с^2 с точностью до сотых.

Подсказка 1: уравнение движения автомобиля с учетом силы сопротивления воздуха $|\vec{F}_c| = \beta v^2$ и прижимающей силы $|\vec{F}_n| = \gamma v$ имеет вид $ma = \mu(mg + \gamma v) - \beta v^2$.

Подсказка 2: из этого уравнения можно получить формулу для зависимости ускорения от скорости и выделить в ней полный квадрат: $a(v) = \mu g + \frac{\mu^2 \gamma^2}{4m\beta} - \frac{\beta}{m} \left(v - \frac{\mu\gamma}{2\beta} \right)^2$.

Подсказка 3: в этой формуле можно неизвестные параметры выразить через a_0 , a_m и v_0 , и тогда можно найти ускорение при любой возможной скорости.

Решение:

Введем обозначения для коэффициентов пропорциональности: пусть величина силы сопротивления воздуха $|\vec{F}_c| = \beta v^2$, а величина прижимающей силы $|\vec{F}_n| = \gamma v$. С учетом прижимной силы сила нормальной реакции дороги становится равной $N = mg + \gamma v$. Поэтому уравнение движения в режиме проскальзывания колес (ясно, что для обеспечения максимальности ускорения нам снова нужен именно такой режим)

$$ma = \mu(mg + \gamma v) - \beta v^2 \Rightarrow a = \mu g + \mu \frac{\gamma}{m} v - \frac{\beta}{m} v^2. \text{ Выделяя из этого выражения полный}$$

квадрат $a(v) = \mu g + \frac{\mu^2 \gamma^2}{4m\beta} - \frac{\beta}{m} \left(v - \frac{\mu\gamma}{2\beta} \right)^2$, замечаем, что максимальное ускорение a_m

достигается при $v_0 = \frac{\mu\gamma}{2\beta}$, и оно равно $a_m = \mu g + \frac{\mu^2 \gamma^2}{4m\beta}$. Теперь мы можем переписать

зависимость ускорения от скорости в виде: $a(v) = a_m - \frac{\beta}{m}(v - v_0)^2$. Подставим в него $v = 0$ и

найдем, что $a_0 = a_m - \frac{\beta}{m}v_0^2 \Rightarrow \frac{\beta}{m} = \frac{a_m - a_0}{v_0^2}$. Таким образом, мы полностью нашли вид этой

зависимости: $a(v) = a_m - (a_m - a_0)\left(\frac{v}{v_0} - 1\right)^2$. При скорости $v_1 = 22 \text{ м/с}$ ускорение равно

$$a_1 = a_m - (a_m - a_0)\left(\frac{v_1}{v_0} - 1\right)^2 = 2,24 \text{ м/с}^2.$$

ОТВЕТ: 2,24.