

**10-11 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Роботфест» по физике**

Набор задач для самостоятельного решения к занятию «заряды в магнитном поле».

Задача 1 (1 балл) [сила Лоренца, продольный дрейф]

Электрон влетает в зазор между торцами тороидального электромагнита в точке А со скоростью $v = 2$ км/с под углом 60° к линиям индукции магнитного поля, которое в зазоре можно считать однородным и перпендикулярным к плоскостям торцов электромагнита. Величина индукции в зазоре $B = 2$ Тл, точка А расположена на равном удалении от торцов электромагнита, ширина зазора $d = 1$ см. Найдите время, за которое электрон долетит от точки А до торца электромагнита. За все время полета электрон не покидает зазора, силами тяжести и сопротивления движению пренебречь. Ответ выразить в мкс с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Движение электрона – комбинация ларморовского вращения в плоскости, параллельной торцам электромагнита и продольного дрейфа в направлении, перпендикулярном этим торцам, но ларморовское вращение никак не влияет на его приближение к торцу.

Подсказка 2: Приближение электрона к торцу будет происходить равномерно со скоростью продольного дрейфа $v_{\parallel} = v \cdot \cos(\alpha)$.

Решение:

Движение электрона – комбинация ларморовского вращения в плоскости, параллельной торцам электромагнита и продольного дрейфа в направлении, перпендикулярном этим торцам. Так как согласно условию электрон не покидает области, где существует однородное магнитное поле, ларморовское вращение никак не повлияет на его приближение к торцу – это приближение будет происходить равномерно со скоростью продольного дрейфа $v_{\parallel} = v \cdot \cos(\alpha)$. Следовательно, время полета электрона до торца

$$t = \frac{d}{2v_{\parallel}} = \frac{d}{2v \cdot \cos(\alpha)} = 5 \text{ мкс.}$$

Ответ: 5.

Задача 2 (3 балла) [сила Лоренца, ларморовское вращение, продольный дрейф]

Электрон влетает в зазор между торцами тороидального электромагнита в точке А со скоростью $v = 2$ км/с под углом 60° к линиям индукции магнитного поля, которое в зазоре можно считать однородным и перпендикулярным к плоскостям торцов электромагнита. Величина индукции в зазоре $B = 2$ Тл, точка А расположена на равном удалении от торцов электромагнита, ширина зазора $d = 1$ см. Сколько тысяч оборотов совершит проекция электрона на плоскость торца электромагнита за время полета до этого торца? Удельный

заряд электрона $\frac{|e|}{m_e} \approx 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. За все время полета электрон не покидает зазора,

силами тяжести и сопротивления движению пренебречь. В ответе укажите $\frac{N}{1000}$ с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Время полета электрона до торца $t = \frac{d}{2v_{\parallel}} = \frac{d}{2v \cdot \cos(\alpha)} = 5$ мкс.

Подсказка 2: Движение электрона – комбинация ларморовского вращения в плоскости, параллельной торцам электромагнита и продольного дрейфа в направлении, перпендикулярном этим торцам.

Подсказка 3: Период ларморовского вращения $T = 2\pi \frac{m_e}{|e| B}$.

Решение:

Движение электрона – комбинация ларморовского вращения в плоскости, параллельной торцам электромагнита и продольного дрейфа в направлении, перпендикулярном этим торцам. Так как согласно условию электрон не покидает области, где существует однородное магнитное поле, ларморовское вращение никак не повлияет на его приближение к торцу – это приближение будет происходить равномерно со скоростью продольного дрейфа $v_{\parallel} = v \cdot \cos(\alpha)$. Следовательно, время полета электрона до торца

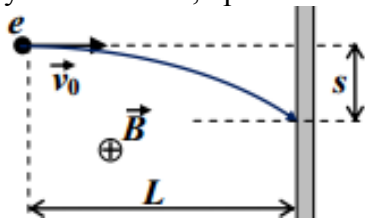
$$t = \frac{d}{2v_{\parallel}} = \frac{d}{2v \cdot \cos(\alpha)} = 5 \text{ мкс. Период ларморовского вращения } T = 2\pi \frac{m_e}{|e| B} \approx 1,785 \cdot 10^{-11} \text{ с,}$$

$$\text{поэтому число оборотов } N = \frac{t}{T} = \frac{|e| B d}{4\pi m_e v \cdot \cos(\alpha)} \approx 280113.$$

Ответ: 280.

Задача 3 (3 балла) [сила Лоренца, ларморовское вращение]

Электронная пушка выстреливает электроны в направлении фотопластинки (перпендикулярно ее поверхности) каждый раз с одной и той же начальной скоростью. Точка выстрела находится на расстоянии $L = 50 \text{ мм}$ от поверхности фотопластинки, и между ними, в вакууме, создано однородное магнитное поле. Электроны попадают на фотопластинку в точке на расстоянии $s = 10 \text{ мм}$ от «точки прицеливания» (см. рисунок). Каким станет отклонение электронов от «точки прицеливания», если величину индукции магнитного поля увеличить в 1,3 раза? Ответ запишите в мм, с точностью до десятых.



Подсказка 1: Электрон запущен в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, так что его движение – это ларморовское вращение.

Подсказка 2: Можно заметить, что $L = R \cdot \sin(\varphi)$ и $s = R[1 - \cos(\varphi)] \Rightarrow R \cos(\varphi) = R - s$, где $\varphi = \frac{|q| B}{m} t$ – угол поворота электрона за время полета t .

Подсказка 3: При увеличении индукции поля в 1,5 раза при той же скорости радиус ларморовской окружности уменьшается во столько же раз: $R' = \frac{2}{3} R$, и поэтому при той же величине L новый угол поворота удовлетворяет уравнению $L = R' \cdot \sin(\varphi') \Rightarrow \sin(\varphi') = \frac{3}{2} \frac{L}{R}$.

Решение:

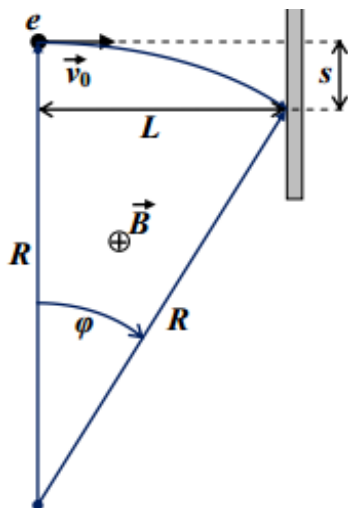
Решение: Электрон запущен в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, так что его движение – это ларморовское вращение по окружности радиусом $R = \frac{mv}{|e| B}$ (v – скорость

электрона) с угловой скоростью $\omega = \frac{|q| B}{m}$. Пусть $\varphi = \frac{|q| B}{m} t$ – угол поворота электрона за время полета t . Тогда, как видно $L = R \cdot \sin(\varphi)$ и $s = R[1 - \cos(\varphi)] \Rightarrow R \cos(\varphi) = R - s$. Значит,

$$R^2 = L^2 + (R - s)^2 \Rightarrow R = \frac{L^2 + s^2}{2s} = 250 \text{ мм.}$$

При увеличении индукции поля в 1,5 раза при той же скорости радиус ларморовской окружности уменьшается во столько же раз: $R' = \frac{2}{3}R$, и поэтому при той же величине L новый угол поворота удовлетворяет уравнению $L = R' \cdot \sin(\varphi') \Rightarrow \sin(\varphi') = \frac{3}{2} \frac{L}{R}$. Таким образом,

$$s' = R'[1 - \cos(\varphi')] = \frac{2}{3}R \left[1 - \sqrt{1 - \frac{9L^2}{4R^2}} \right] = \frac{2R - \sqrt{4R^2 - 9L^2}}{3} \approx 13,4 \text{ мм.}$$



Ответ: 13,4.

Задача 4 (3 балла) [сила Лоренца, продольный дрейф, дрейф в скрещенных полях]

В вакуумной камере создано горизонтальное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. В нее запустили маленький заряженный шарик с массой $m = 10$ г и зарядом $q = 1$ мКл, летящий горизонтально со скоростью $v = 392$ м/с. Шарик полетел в камере равномерно-прямолинейно. Найдите угол α между направлением движения шарика и направлением вектора магнитной индукции (известно, что $0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Ускорение свободного падения для лучшей точности считайте равным $g \approx 9,8$ м/с². Ответ выразить в градусах с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Поскольку движение шарика – равномерное и прямолинейное, несмотря на действие силы тяжести и силы Лоренца, то эти силы уравниваются друг друга, и движение шарика – дрейф в скрещенных полях.

Подсказка 2: Условие равновесия сил имеет вид $mg = qv_{\perp}B$, где $v_{\perp}$ – это компонента скорости шарика, перпендикулярная магнитному полю.

Подсказка 3: Ясно, что $v_{\perp} = v \cdot \sin(\alpha)$.

Решение:

Поскольку движение шарика – равномерное и прямолинейное, несмотря на действие силы тяжести и силы Лоренца, то эти силы уравниваются друг друга, и движение шарика – дрейф в скрещенных полях. Условие равновесия сил $mg = qv_{\perp}B$ позволяет найти компоненту скорости шарика, перпендикулярную магнитному полю: $v_{\perp} = \frac{mg}{qB}$. Значит, угол между $\vec{v}$ и

$\vec{B}$ удовлетворяет уравнению $\sin(\alpha) = \frac{v_{\perp}}{v} = \frac{mg}{qvB} = \frac{1}{2}$. В нужном диапазоне корень этого уравнения – это 30° .

Ответ: 30.

Задача 5 (4 балла) [сила Лоренца, продольная сила, ларморовское вращение]

В некоторой области пространства откачан воздух и размещена отрицательно заряженная частая сетка, создающее в этой области почти однородное электрическое поле с напряженностью 1000 В/м. Кроме того, в этой области создано магнитное поле с индукцией 2 Тл, причем линии индукции параллельны силовым линиям электрического поля. Из одной из ячеек сетки ионная мушка выстреливает ион с удельным зарядом $+8 \cdot 10^6$ Кл/кг со скоростью 1 км/с под углом 35° к плоскости сетки. На каком расстоянии от точки вылета будет находиться ион в тот момент, когда он впервые вновь окажется в площади сетки? Ответ запишите в мкм с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

Подсказка 1: На ион действуют сила Лоренца и электрическая сила $\vec{F}_e = q\vec{E}$, направленная вдоль линий индукции магнитного поля, которые всегда перпендикулярны друг другу.

Подсказка 2: Сила Лоренца не влияет на движение вдоль линий индукции (перпендикулярно сетке), и в этом направлении ион движется равноускоренно с ускорением, создаваемым

электрической силой $|a_{\parallel}| = \frac{qE}{m}$.

Подсказка 3: Электрическая сила не влияет на движение в плоскости, параллельной сетке, и поэтому в этой плоскости ион совершает ларморовское вращение по окружности радиусом

$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ (где $v_{\perp} = v_0 \cos(\alpha)$ – проекция начальной скорости иона v_0 на плоскость сетки) с

угловой скоростью $\omega = \frac{qB}{m}$.

Решение:

На ион действуют сила Лоренца и электрическая сила $\vec{F}_e = q\vec{E}$, направленная вдоль линий индукции магнитного поля. Сила Лоренца всегда направлена в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, и поэтому эти силы действуют независимо: сила Лоренца не влияет на движение вдоль линий индукции (перпендикулярно сетке), а электрическая сила не влияет на движение в плоскости, параллельной сетке (и поэтому в этой плоскости ион совершает ларморовское вращение по окружности радиусом $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ (где $v_{\perp} = v_0 \cos(\alpha)$ – проекция

начальной скорости иона v_0 на плоскость сетки) с угловой скоростью $\omega = \frac{qB}{m}$. Совместим

начало координат с точкой старта иона и направим ось z перпендикулярно сетке так, чтобы проекция начальной скорости иона была положительна: $v_z(0) = +v_0 \sin(\alpha)$. Тогда закон

движения по оси z соответствует равноускоренному движению: $z(t) = +v_0 \sin(\alpha)t - \frac{qE}{2m}t^2$, и

ион впервые окажется в площади сетки через время $t = \frac{2mv_0 \sin(\alpha)}{qE}$ после старта. В

плоскости сетки его смещение за это время – это хорда дуги ларморовской окружности с

угловым размером $\varphi = \frac{qB}{m}t = \frac{2Bv_0 \sin(\alpha)}{E}$. Значит, искомое расстояние

$$l = 2R \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2mv_0 \cos(\alpha)}{qB} \cdot \sin\left(\frac{Bv_0 \sin(\alpha)}{E}\right) \approx 55,6 \text{ мкм.}$$

Ответ: 55,6.

Задача 6 (4 балла) [сила Лоренца, продольная сила, ларморовское вращение]

В области над горизонтальным участком поверхности Земли создано вертикальное однородное магнитное поле с индукцией $B = 4$ Тл. Небольшой шарик массой $m = 100$ г с зарядом $q = 1$ мКл запускают с поверхности со скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к

горизонту. Ускорение свободного падения равно $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Найти дальность полета шарика, пренебрегая сопротивлением воздуха. Ответ запишите в метрах, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Уравнение движение шарика вдоль оси z , направленной вертикально вверх, не содержит магнитного поля – по этой оси шарик движется с ускорением свободного падения, и потому движение вдоль вертикали не отличается от «обычного» движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Подсказка 2: В горизонтальной плоскости xy тело движется, «не чувствуя» поля тяжести, и поэтому оно совершает ларморовское вращение с угловой скоростью $\omega = \frac{|q| B}{m}$ по окружности радиуса $R = \frac{mv_0 \cos(\alpha)}{|q| B}$.

Подсказка 3: Время полета определяется условием $z(t_n) = 0$, то есть $t_n = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$.

Решение:

Уравнение движение шарика вдоль оси z , направленной вертикально вверх, не содержит магнитного поля – по этой оси шарик движется с ускорением свободного падения, и потому движение вдоль вертикали не отличается от «обычного» движения тела, брошенного под

углом к горизонту: $z(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$. В горизонтальной плоскости xy тело движется,

«не чувствуя» поля тяжести, и поэтому оно совершает ларморовское вращение с угловой скоростью $\omega = \frac{|q| B}{m}$ по окружности радиуса $R = \frac{mv_0 \cos(\alpha)}{|q| B}$. Время полета определяется

условием $z(t_n) = 0$, то есть $t_n = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$. Точка падения – точка ларморовской

окружности, угол поворота до которой составляет $\varphi = \omega t_n = \frac{2|q| B v_0 \sin(\alpha)}{mg}$. Дальность

полета – длина хорды ларморовской окружности с таким угловым размером, то есть

$$L = 2R \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2mv_0 \cos(\alpha)}{|q| B} \sin\left(\frac{|q| B v_0 \sin(\alpha)}{mg}\right) \approx 34,6 \text{ м.}$$

Ответ: 34,6.

Задача 7 (6 баллов) [сила Лоренца, ларморовское вращение, дрейф в скрещенных полях]

Небольшой шарик с зарядом $q > 0$ и массой m отпускают без начальной скорости на высоте $h = 3 \text{ м}$ над плоским горизонтальным участком поверхности Земли в области, в которой создано однородное магнитное поле с индукцией B . Линии индукции поля горизонтальны.

На какое расстояние удалится шарик от исходного положения за время $t = \frac{3\pi m}{4qB}$?

Сопротивлением воздуха пренебречь. Известно, что удельный заряд шарика удовлетворяет

условию $\frac{qB}{m} = 2\sqrt{\frac{g}{h}}$. Ответ записать в см, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Здесь удобно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью дрейфа в скрещенных полях (в данном случае это скорость $\vec{v}_D$, удовлетворяющая требованию $q[\vec{v}_D \times \vec{B}] + m\vec{g} = 0$).

Подсказка 2: $\vec{v}_D$ направлена горизонтально перпендикулярно $\vec{B}$, и в такой системе отсчета ускорение шарика равно ускорению относительно земли ($\vec{a} = \vec{a}'$), а скорость шарика $\vec{v} = \vec{v}_D + \vec{v}'$.

Подсказка 3: Поэтому в этой системе отсчета уравнение движения шарика относительно Земли $m\vec{a} = m\vec{g} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$ превращается в $m\vec{a}' = q[\vec{v}' \times \vec{B}]$, то есть движение относительно нее сводится к «чистому» ларморовскому вращению шарика только в магнитном поле, при начальной скорости $\vec{v}'_0 = -\vec{v}_D$.

Подсказка 4: Если ввести горизонтальную координату x и вертикальную координату y так, чтобы начальное положение шарика соответствовало $(x_0, y_0) = (0, h)$, то связь этих координат в двух системах отсчета $x(t) = x'(t) + v_D t$ и $y(t) = y'(t)$.

Решение:

Направим оси координат, как показано на рисунке. В системе отсчета, связанной с Землей, уравнение движения шарика весьма сложно: это

$$m\vec{a} = q[\vec{v} \times \vec{B}] + m\vec{g}$$

Можно постараться его упростить, выбрав более удобную систему отсчета – «дрейфующую». Эта система отсчета движется относительно исходной со скоростью дрейфа в скрещенных полях (в данном случае это скорость $\vec{v}_D$, удовлетворяющая требованию

$$q[\vec{v}_D \times \vec{B}] + m\vec{g} = 0). \text{ Она равна по модулю } v_D = \frac{mg}{qB}, \text{ направлена горизонтально}$$

перпендикулярно $\vec{B}$ (на рисунке «вправо»), и в такой системе отсчета ускорение шарика равно ускорению относительно земли ($\vec{a} = \vec{a}'$), а скорости связаны равенством $\vec{v} = \vec{v}_D + \vec{v}'$. Поэтому уравнение движения в ней принимает вид

$$m\vec{a}' = q[\vec{v}' \times \vec{B}] + q[\vec{v}_D \times \vec{B}] + \vec{F} = q[\vec{v}' \times \vec{B}],$$

то есть становится уравнением движения в одном только магнитном поле – поле тяжести «исчезает»! В результате в ней движение шарика сводится к «чистому» ларморовскому вращению шарика только в магнитном поле, при начальной скорости $\vec{v}'_0 = -\vec{v}_D$. Радиус

ларморовской окружности $R = \frac{mv_D}{qB} = g \left(\frac{m}{qB} \right)^2$, угловая скорость $\omega = \frac{qB}{m}$. У нас $h > 2R$, и

поэтому шарик не заденет Землю, и траекторией его движения будет циклоида – кривая, которую описывает точка на ободе катящегося без проскальзывания колеса радиуса R . В самом деле, закон движения (ларморовского вращения) в «дрейфующей» системе отсчета

$$\begin{cases} x'(t) = -R \sin(\omega t) = -\frac{m^2 g}{q^2 B^2} \sin\left(\frac{qBt}{m}\right) \\ y'(t) = h - R + R \cos(\omega t) = h - \frac{m^2 g}{q^2 B^2} + \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) \end{cases}$$

А в системе отсчета, связанной с Землей:

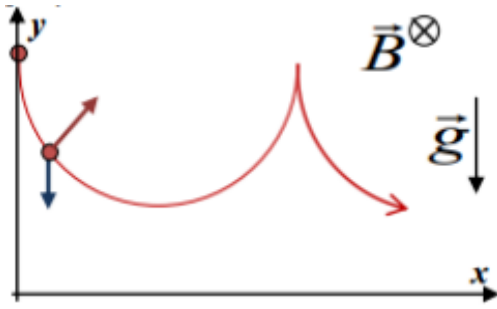
$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + v_D t = v_D t - R \sin(\omega t) = \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \left(\frac{qBt}{m} - \sin\left(\frac{qBt}{m}\right) \right) \\ y(t) = y'(t) = h - \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \left(1 - \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) \right) \end{cases}$$

Таким образом, удаление от начальной точки

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + (h - y(t))^2} = \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \left[2 + \left(\frac{qBt}{m} \right)^2 - 2 \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) - 2 \frac{qBt}{m} \sin\left(\frac{qBt}{m}\right) \right]^{1/2}.$$

Подставляя заданные в условии соотношения для времени и удельного заряда, получаем:

$$r(t) = \frac{h}{4} \sqrt{2 + \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2} \approx 206 \text{ см.}$$



Ответ: 206.