

10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задание для самостоятельного решения к занятию 6 (03.02.2018).

Тема: «ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ.»

Задача 1 (3 балла) [первое начало термодинамики, работа, количество теплоты]

Гелий, занимающий объем $V_0 = 2$ л, находится под давлением $p_0 = 10^5$ Па при температуре $t_0 = 28^\circ\text{C}$. От этого состояния гелий расширяется квазиравновесно, и при этом отданное им в окружающую среду количество тепла в четыре раза меньше совершенной им работы. Найти максимально возможное значение работы гелия в этом процессе. Ответ выразить в Дж.

Подсказка 1: при заданной температуре гелий можно считать одноатомным идеальным газом.

Подсказка 2: в данном процессе $-Q = A + \Delta U = -\frac{A}{4} \Rightarrow A = -\frac{4}{5}\Delta U$.

Подсказка 3: так как гелий расширяется, то работа положительна, и внутренняя энергия убывает от начального значения $U_0 = \frac{3}{2}p_0V_0$.

Решение:

При заданной температуре гелий можно считать одноатомным идеальным газом. Значит, его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}pV$. В соответствии с первым Началом термодинамики и условием задачи в данном процессе (из условия понятно, что $Q < 0$)

$$-Q = A + \Delta U = -\frac{A}{4} \Rightarrow A = -\frac{4}{5}\Delta U.$$

Так как гелий расширяется, то $A > 0$. Таким образом, $\Delta U < 0$. Поскольку начальное значение внутренней энергии гелия $U_0 = \frac{3}{2}p_0V_0$, а в конечном состоянии $U > 0$, то

$$A \leq \frac{4}{5}U_0 = \frac{6}{5}p_0V_0 = 240 \text{ Дж.}$$

ОТВЕТ: 240.

Задача 2 (4 балла) [работа, количество теплоты, теплоемкость]

Определить молярную теплоемкость одноатомного идеального газа в процессе расширения, в котором его давление изменяется по закону $p(V) = \alpha \cdot V$, $\alpha = \text{const}$. В ответе укажите

величину $\frac{c}{R}$.

Подсказка 1: работа газа в таком процессе равна площади под диаграммой процесса в координатах $p - V$ (площади трапеции).

Подсказка 2: эта работа

$$A = \frac{p(V_1) + p(V_2)}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2 + V_1)(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2).$$

Подсказка 3: изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T$.

Решение:

Рассмотрим расширение одного моля газа от объема V_1 до V_2 . Работа газа равна площади под диаграммой процесса в координатах $p - V$ (площади трапеции), то есть

$$A = \frac{p(V_1) + p(V_2)}{2}(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2 + V_1)(V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2).$$

При этом изменение температуры, в соответствии с уравнением состояния

$$\Delta T = \frac{1}{R}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{\alpha}{R}(V_2^2 - V_1^2),$$

поэтому $A = \frac{R}{2} \Delta T$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2} R \Delta T$, поэтому

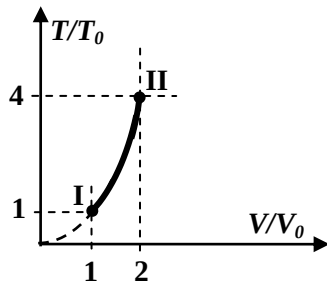
$$Q = A + \Delta U = 2R \Delta T \Rightarrow c = \frac{Q}{\Delta T} = 2R.$$

Полезно заметить, что ответ не зависит от α !

ОТВЕТ: 2.

Задача 3 (4 балла) [первое начало термодинамики, работа, количество теплоты]

Диаграмма процесса $I \rightarrow II$ над 1 молем гелия в координатах объем-температура имеет вид отрезка параболы $T = T_0 \cdot \left(\frac{V}{V_0}\right)^2$. Найти количество теплоты, сообщенное гелию в этом процессе, если известно, что $T_0 = 150 \text{ K}$. Ответ запишите в кДж, округлив до десятых.



Подсказка 1: используя уравнение состояния $pV = RT$ вместе с уравнением процесса, обнаружим, что в координатах $p - V$ уравнение процесса линейно.

Подсказка 2: поэтому работа гелия в данном процессе вычисляется как площадь трапеции.

Подсказка 3: $A_{12} = \frac{p_I + p_{II}}{2} \cdot V_0 = \frac{V_0}{2} \left(\frac{RT_0}{V_0} + \frac{2RT_0}{V_0} \right) = \frac{3}{2} RT_0.$

Решение:

Используя уравнение состояния $pV = RT$ вместе с уравнением процесса, обнаружим, что в координатах $p - V$ уравнение процесса линейно:

$$\left. \begin{array}{l} pV = RT \\ T = T_0 \cdot \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow p = \frac{RT_0}{V_0^2} V.$$

Поэтому работа гелия в данном процессе вычисляется как площадь трапеции:

$$A_{12} = \frac{p_I + p_{II}}{2} \cdot V_0 = \frac{V_0}{2} \left(\frac{RT_0}{V_0} + \frac{2RT_0}{V_0} \right) = \frac{3}{2} RT_0,$$

а количество теплоты

$$Q_{12} = A_{12} + \frac{3}{2} R(T_{II} - T_I) = 6RT_0 \approx 6 \cdot 8,31 \cdot 150 \text{ Дж} \approx 7480 \text{ Дж}.$$

ОТВЕТ: 7,5.

Задача 4 (5 баллов) [тепловая машина, теплоемкость, адиабата]

Цикл рабочего тела тепловой машины (идеального газа) состоит из двух изобар и двух адиабат. Известно, что в процессе адиабатического расширения температура падает в $n = \frac{5}{3}$

раза, а в процессе адиабатического сжатия – во столько же раз увеличивается. Найти КПД цикла. Ответ запишите в процентах.

Подсказка 1: поскольку в адиабатических процессах теплообмена нет, то теплоты Нагревателя и Холодильника вычисляются через теплоемкость газа в изобарном процессе.

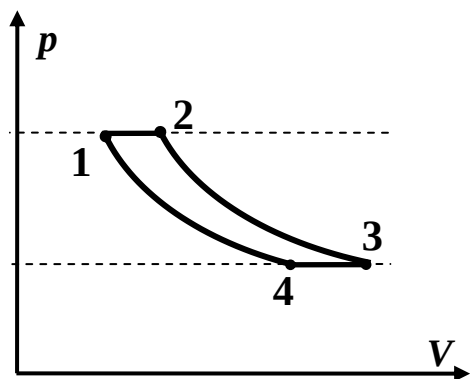
Подсказка 2: молярная теплоемкость газа в изобарном процессе c_p и – некоторая константа

для данного газа (например, для одноатомного идеального газа $c_p = \frac{5R}{2}$), и теплота

нагревателя $Q_H = Q_{12} = c_p \nu (T_2 - T_1)$.

Подсказка 3: теплота холодильника $Q_X = -Q_{34} = c_p \nu (T_3 - T_4)$.

Решение:



Изобразим диаграмму процесса. Поскольку в адиабатических процессах теплообмена нет, то теплоты Нагревателя и Холодильника вычисляются через теплоемкость газа в изобарном

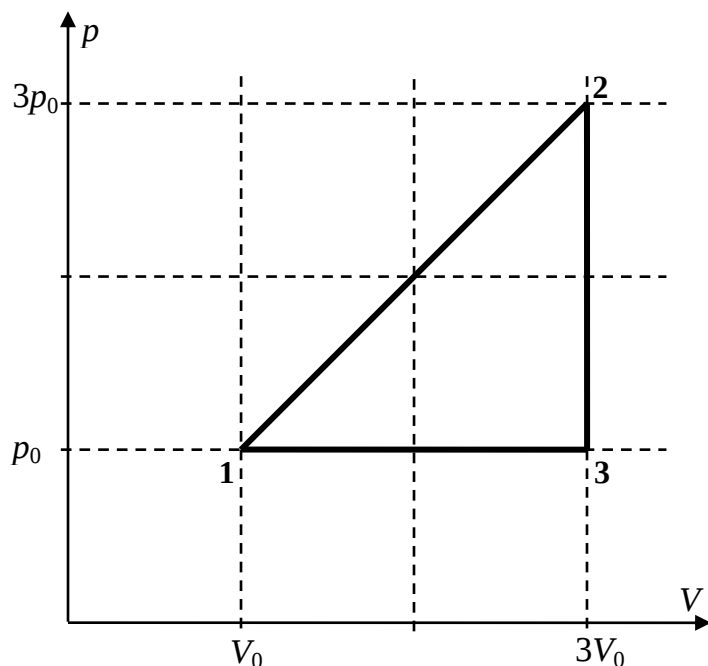
процессе: $Q_H = c_p \nu (T_2 - T_1)$ и $Q_X = c_p \nu (T_3 - T_4)$. Значит, $\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}$. Однако по

условию $T_2 = n \cdot T_3$ и $T_1 = n \cdot T_4$. Поэтому $\eta = 1 - \frac{1}{n} = \frac{2}{5} = 40\%$.

ОТВЕТ: 40.

Задача 5 (4 балла) [тепловая машина, КПД]

Найти КПД тепловой машины, цикл которой изображен на рисунке 2. Рабочее тело – одноатомный идеальный газ. Ответ выразить в процентах с точностью до десятых.



Подсказка 1: удобно вычислять работу цикла (как площадь) и теплоту холодильника (процессы, в которых газ отдает тепло – простые: изохорный 2-3 и изобарный 3-1).

Подсказка 2: $A = \frac{1}{2} 2p_0 \cdot 2V_0 = 2p_0V_0$.

Подсказка 3: для процессов 2-3 и 3-1:

$$-Q_{23} = \frac{3}{2}(3p_0 - p_0)3V_0 = 9p_0V_0, -Q_{31} = \frac{5}{2}(3V_0 - V_0)p_0 = 5p_0V_0.$$

Решение:

В данном случае удобно вычислять работу цикла (как площадь) и теплоту холодильника (процессы, в которых газ отдает тепло – простые: изохорный 3-4 и изобарный 4-1). Итак, работа $A = \frac{1}{2} 2p_0 \cdot 2V_0 = 2p_0V_0$. Теплота холодильника $Q_X = -Q_{23} - Q_{31}$, и при этом

$$-Q_{23} = \frac{3}{2}(3p_0 - p_0)3V_0 = 9p_0V_0, -Q_{31} = \frac{5}{2}(3V_0 - V_0)p_0 = 5p_0V_0.$$

Таким образом, $\eta = \frac{A}{A + Q_X} = \frac{1}{8} \approx 0,125$.

ОТВЕТ: 12,5.

Задача 6 (5 баллов) [тепловая машина, КПД]

В качестве рабочего вещества в тепловой машине используется постоянное количество гелия, изменение состояния которого в координатах $p-V$ изображается диаграммой в виде равнобедренного треугольника, основание которого (процесс 3-1) параллельно оси V . Найти КПД этого цикла, если температура газа в нем максимальна в точке 3, в точке 2 (вершина треугольника) абсолютная температура в $\beta = 1,5$ раза меньше максимальной, а в точке 1 в $\alpha = 4$ раза меньше, чем в точке 2. Ответ выразить в процентах, округлив до десятых.

Подсказка 1: используя уравнение состояния и то, что по описанию цикла $p_3 = p_1$ и

$V_2 = \frac{V_1 + V_3}{2}$, следует выразить все давления и объемы через их значение в одной точке.

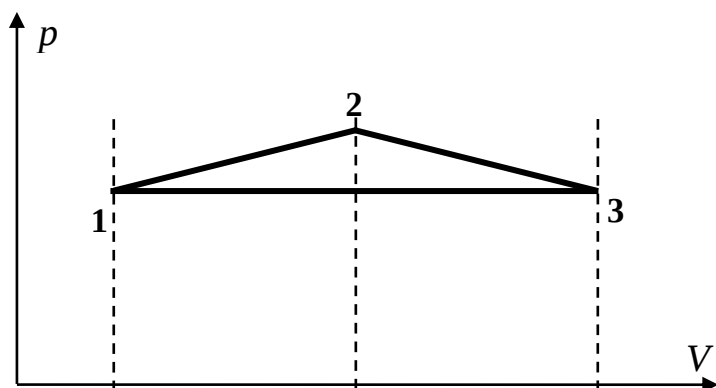
Подсказка 2: работа цикла

$$A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = \frac{(2\alpha - \alpha\beta - 1)(\alpha\beta - 1)}{2(1 + \alpha\beta)} p_1 V_1.$$

Подсказка 3: газ отдает тепло только в изобарическом процессе $3 \rightarrow 1$.

Решение:

Полезно изобразить цикл рабочего тела в координатах $p-V$ (см. рисунок).



С учетом данных задачи нетрудно, используя уравнение состояния, выразить все давления и объемы через их значение в одной точке. В самом деле:

$$\beta = \frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{p_2 V_2} = \frac{2 p_1 V_3}{p_2 (V_1 + V_3)} \Rightarrow 2 p_1 V_3 = \beta p_2 (V_1 + V_3),$$

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{p_2 (V_1 + V_3)}{2 p_1 V_1} \Rightarrow 2\alpha p_1 V_1 = p_2 (V_1 + V_3)$$

(здесь учтено, что по описанию цикла $p_3 = p_1$ и $V_2 = \frac{V_1 + V_3}{2}$). Из этих двух уравнений легко

выражаем: $V_3 = \alpha\beta \cdot V_1$, $p_2 = \frac{2\alpha}{1 + \alpha\beta} p_1$. Теперь заметим, что в этой задачке проще всего

считать работу цикла и теплоту холодильника, так как

$$A = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (V_3 - V_1) = \frac{(2\alpha - \alpha\beta - 1)(\alpha\beta - 1)}{2(1 + \alpha\beta)} p_1 V_1,$$

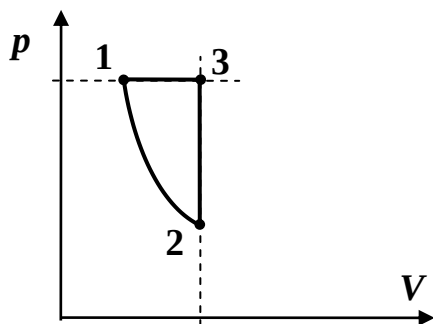
$$Q_X = -Q_{31} = p_1 (V_3 - V_1) + \frac{3}{2} p_1 (V_3 - V_1) = \frac{5}{2} (\alpha\beta - 1) p_1 V_1.$$

$$\text{Значит, } \eta = \frac{A}{A + Q_X} = \frac{2\alpha - \alpha\beta - 1}{2(\alpha + 2\alpha\beta + 2)} = \frac{1}{36} \approx 0,0278 \approx 2,8\%.$$

ОТВЕТ: 2,8.

Задача 7 (5 баллов) [холодильная установка, холодильный коэффициент]

На рисунке представлена $p - V$ -диаграмма циклического процесса над идеальным одноатомным газом, некоторое количество которого является рабочим телом холодильной установки. В этом цикле расширение газа происходит адиабатически. Объем газа в точке 1 на $n\%$ меньше его объема в точке 3, а давление в точке 2 – на $k\%$ меньше давления в точке 3. Известно, что n и k связаны соотношением: $n/k = 4/5$. Найти холодильный коэффициент установки. Ответ запишите в процентах.



Подсказка 1: газ забирает тепло у холодильника в процессе 2-3 (изохорическое нагревание), и сбрасывает тепло «теплоприемнику» в процессе 3-1 (изобарическое охлаждение).

Подсказка 2: Поскольку $\frac{p_2}{p_3} = 1 - \frac{k}{100}$, теплоту холодильника можно найти как

$$Q_X = \frac{3}{2} (p_3 V_3 - p_2 V_2) = \frac{3}{2} p_3 V_3 \left[1 - \left(1 - \frac{k}{100} \right) \right] = \frac{3k}{200} p_3 V_3.$$

Подсказка 3: работа над газом $A = Q_H - Q_X$, а холодильный коэффициент $k \equiv \frac{Q_X}{A}$.

Решение:

Газ забирает тепло у холодильника в процессе 2-3 (изохорическое нагревание), и сбрасывает тепло «теплоприемнику» в процессе 3-1 (изобарическое охлаждение). В адиабатическом процессе 1-2 теплообмена нет. Поэтому

$$Q_X = \frac{3}{2} (p_3 V_3 - p_2 V_2) = \frac{3}{2} p_3 V_3 \left[1 - \left(1 - \frac{k}{100} \right) \right] = \frac{3k}{200} p_3 V_3$$

(здесь учтено, что $V_2 = V_3$ и, согласно условию, $\frac{p_2}{p_3} = 1 - \frac{k}{100}$). Аналогично

$$Q_H = \frac{5}{2}(p_3V_3 - p_1V_1) = \frac{5}{2}p_3V_3\left[1 - \left(1 - \frac{n}{100}\right)\right] = \frac{5n}{200}p_3V_3.$$

Поэтому работа над газом $A = Q_H - Q_X = \frac{5n-3k}{200}p_3V_3$. По определению холодильного коэффициента $k \equiv \frac{Q_X}{A} = \frac{3k}{5n-3k} = \frac{3}{5(n/k)-3} = 3 = 300\%$.

ОТВЕТ: 300.

Задача 8 (5 баллов) [холодильная установка, холодильный коэффициент, поток тепла]

Поток тепла, затекающий в камеру холодильника (то есть количество тепла ΔQ_X , проходящего внутрь камеры в единицу времени $\Delta \tau$) пропорционален разности температур окружающей среды и содержимого камеры: $\frac{\Delta Q_X}{\Delta \tau} = \alpha(t_H - t_X)$, где величина α – некоторая постоянная, характеризующая данную камеру. Рассмотрим камеру, у которой $\alpha = 0,36$ кВт/К. Пусть КПД электродвигателя холодильника $\eta_{\odot} = 70\%$, а рабочее тело холодильной установки совершает цикл, близкий к циклу Карно. Установка поддерживает в камере постоянную температуру $t_X = -13^\circ\text{C}$, а температура снаружи равна $t_H = +22^\circ\text{C}$. Какую минимальную мощность должен потреблять электродвигатель холодильника для поддержания заданной температуры? Ответ запишите в Вт с точностью до целого значения.

Подсказка 1: поскольку по условию цикл рабочего тела можно считать циклом Карно, то

$$\frac{A}{Q_H} = \frac{A}{Q_X + A} = 1 - \frac{T_X}{T_H}.$$

Подсказка 2: из этих соотношений можно найти, что $Q_X = \frac{T_X}{T_H - T_X} A$.

Подсказка 3: тепло, забираемое у холодильника, при постоянной температуре содержимого должно в точности компенсировать тепло, приходящее от наружной среды: $Q_X = \alpha(t_H - t_X)\Delta \tau = \alpha(T_H - T_X)\Delta \tau$.

Решение:

Рабочее тело в холодильной установке за счет совершения работы A забирает тепло Q_X у холодильника и сбрасывает всю полученную энергию в виде тепла $Q_H = A + Q_X$ наружной среде (через радиатор). Поскольку по условию цикл рабочего тела можно считать циклом Карно, то $\frac{A}{Q_H} = \frac{A}{Q_X + A} = 1 - \frac{T_X}{T_H}$, где $T_X \approx 250$ К и $T_H \approx 300$ К – абсолютные температуры холодильника и наружной среды. Из этих соотношений можно выразить

$Q_X = \frac{T_X}{T_H - T_X} A$. С другой стороны, работа электродвигателя за время $\Delta \tau$ равна

$A = \eta_{\odot} P \Delta \tau$, где P – искомая потребляемая мощность. А тепло, забираемое у холодильника, при постоянной температуре содержимого должно в точности компенсировать тепло, приходящее от наружной среды: $Q_X = \alpha(t_H - t_X)\Delta \tau = \alpha(T_H - T_X)\Delta \tau$. Итак, получается уравнение

$$\alpha(T_H - T_X)\Delta \tau = \frac{T_X}{T_H - T_X} \eta_{\odot} P \Delta \tau \Rightarrow P = \frac{\alpha(T_H - T_X)^2}{\eta_{\odot} T_X} = 1750 \text{ Вт}.$$

Это действительно минимальная требуемая мощность, так как мы учли только «обязательные» потери (связанные с необходимостью передачи тепла от холодного тела к

горячему и с потерями электродвигателя), а в реальности могут появиться еще «дополнительные» (например, трение в передающих движение узлах).

ОТВЕТ: 1750.