10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задание для самостоятельного решения к занятию 5 (30.01.2018).

Тема: «ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ, ТЕПЛООБМЕН И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ.»

Задача 1 (3 балла) [идеальный газ, уравнение Менделеева-Клапейрона]
В гладкой горизонтальной трубке постоянного сечения, запаянной с одного конца и заполненной атмосферным воздухом, помещен столбик ртути длиной $l = 3$см. Столбик ртути покоится при неизменном давлении внешнего атмосферного воздуха $p_0 = 750$мм.рт.ст. Трубку повернули вертикально запаянным концом вниз. На сколько градусов (К) надо медленно нагреть воздух в трубке, чтобы столбик ртути вернулся в исходное положение при том же давлении внешнего воздуха? Температура окружающего воздуха $t_0 = 27°C$, ответ округлить до целого значения.
Подсказка 1: так как изначально столбик ртути покоился, давление воздуха в трубке равнялось давлению внешнего воздуха.
Подсказка 2: при вертикальном положении трубки равновесие столбика ртути достигается в положении, когда разность давлений уравновешивает вес ртути: $\rho Slg = (p - p_0)S$.
Подсказка 3: если V - объем воздуха в трубке при исходном положении столбика ртути, то уравнение состояния ν молей воздуха в горизонтальной трубке: $p_0V = \nu RT_0$, а в вертикальной после нагрева: $pV = \nu RT$.

Решение:

Так как изначально столбик ртути покоился, давление воздуха в трубке равнялось давлению внешнего воздуха. Если обозначить V объем воздуха в трубке при исходном положении столбика ртути, а ν – количество воздуха в трубке, то уравнение состояния этого воздуха имеет вид: $p_0V = \nu RT_0$. После поворота трубки в вертикальное положение и нагрева столбик ртути должен вернуться в исходное положение (нагрев медленный, поэтому считаем это положение равновесным), и уравнение состояния примет вид $pV = \nu RT$. Таким образом: $p = p_0\dfrac{T}{T_0}$, где $T_0 \approx 300$К. Кроме того, поскольку при вертикальном положении трубки равновесие столбика ртути достигается в положении, когда разность давлений уравновешивает вес ртути, то: $\rho Slg = (p - p_0)S$. Отсюда находим:

$$\rho lg = p_0\frac{T - T_0}{T_0} \Rightarrow \Delta T = T - T_0 = \frac{\rho lg}{p_0}T_0 = 12\text{ К}.$$

ОТВЕТ: 12.

Задача 2 (3 балла) [идеальный газ, уравнение Менделеева-Клапейрона]
В цилиндрическом сосуде с гладкими вертикальными стенками может скользить без нарушения герметичности горизонтальный легкий поршень площадью $S = 4$см^2. Первоначально он покоился на высоте $h_0 = 30$см над дном сосуда. После того, как на поршень аккуратно насыпали $m = 2$ кг мелкой свинцовой дроби и медленно закачали под поршень некоторое количество газа, поршень остановился на высоте $h = 25$см над дном сосуда. На сколько процентов увеличилось количество газа под поршнем при закачивании? Температуру считать неизменной, давление внешнего (атмосферного) воздуха считать равным $p_0 = 100$кПа, ускорение свободного падения $g = 10$м/с^2.
Подсказка 1: первоначально давление ν_0 молей газа под поршнем равнялось p_0, и его уравнение состояния: $p_0Sh_0 = \nu_0RT$.

Подсказка 2: давление газа после насыпания дроби находится из условия равновесия: $mg + p_0S = pS \Rightarrow p = p_0 + \frac{mg}{S}$.

Подсказка 3: уравнение состояния газа под поршнем после подкачки: $pSh = \nu RT$.

Решение:

Пренебрегая весом поршня, будем считать, что первоначально давление газа под поршнем равнялось p_0. Запишем уравнение состояния этого газа: $p_0Sh_0 = \nu_0RT$, где ν_0 – начальное количество газа под поршнем. После насыпания дроби давление газа возросло. Новое давление находится из условия равновесия: $mg + p_0S = pS \Rightarrow p = p_0 + \frac{mg}{S}$. Записав уравнение состояния газа под поршнем после подкачки: $pSh = \nu RT$, получим:

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)Sh = \frac{\nu}{\nu_0}p_0Sh_0 \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{h}{h_0}\left(1 + \frac{mg}{p_0S}\right) - 1 = 0{,}25$$

Ответ: 25.

Задача 3 (4 балла) [идеальный газ, уравнение Менделеева-Клапейрона, внутренняя энергия]

Теплоизолированный сосуд разделен теплоизолирующей перегородкой на две равные по объему части. В правой находится некоторое количество гелия, а в левой – такое же количество аргона. Температура гелия равна $T_1 = 300$ К, а температура аргона - $T_2 = 450$ К. Во сколько раз изменится давление на правую стенку сосуда после удаления перегородки и установления равновесия? Ответ запишите в виде десятичной дроби.

Подсказка 1: начальное давление на правую стенку – это давление ν молей гелия, который занимает объем $\frac{V}{2}$ при температуре T_1 (V – объем сосуда).

Подсказка 2: так как система теплоизолирована и над ней не производится работа, то сумма внутренних энергий газов остается неизменной после удаления перегородки и перемешивания газов $U' = \frac{3}{2}2\nu RT = U = \frac{3}{2}\nu R(T_1 + T_2)$.

Подсказка 3: конечное давление на стенки сосуда определяется суммой равных парциальных давлений газов, распределившихся по всему объему сосуда с общей установившейся температурой.

Решение:

Пусть ν – количество и гелия, и аргона, а V - объем сосуда. Начальное давление на правую стенку – это давление гелия, который занимает объем $\frac{V}{2}$. В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона $p = \frac{2\nu RT_1}{V}$. Суммарная внутренняя энергия обоих газов до удаления перегородки $U = \frac{3}{2}\nu RT_1 + \frac{3}{2}\nu RT_2 = \frac{3}{2}\nu R(T_1 + T_2)$. После удаления перегородки и установления равновесия оба газа распределятся по всему объему сосуда, а их температуры выровняются. Следовательно, теперь суммарная внутренняя энергия $U' = \frac{3}{2}2\nu RT$, и, поскольку сосуд теплоизолирован и его объем неизменен, то $U' = U \Rightarrow T = \frac{T_1 + T_2}{2}$. Теперь давление на стенки сосуда определяется суммой равных парциальных давлений газов $p' = 2\frac{\nu RT}{V} = \frac{\nu R(T_1 + T_2)}{V}$. Следовательно, $\frac{p'}{p} = \frac{T_1 + T_2}{2T_1} = 1{,}25$.

ОТВЕТ: 1,25.

Задача 4 (4 балла) [идеальный газ, уравнение состояния, внутренняя энергия]

Сосуд с гелием разделен теплопроводящей подвижной перегородкой на две части. Первоначально температура гелия в первой части была $t_1 = -73°C$, а объем этой части – V_1. Объем второй части V_2, а температура $t_2 = +527°C$. При выравнивании температур перегородка перемещается. Когда температуры выровнялись, объем первой части стал равен V_2. Найти температуру гелия в конечном состоянии. Теплообмен с окружающей средой отсутствует. Деформациями и тепловым расширением стенок сосуда пренебречь. Ответ записать в Кельвинах по абсолютной шкале температур, округлив до целого значения.

Подсказка 1: выравнивания температур для в первой и второй части сосуда: $p_1V_1 = \nu_1 RT_1$, $p_1V_2 = \nu_2 RT_2$, поэтому $\frac{\nu_1 T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 T_2}{V_2}$.

Подсказка 2: аналогично после выравнивания температур: $pV_2 = \nu_1 RT$, $pV_1 = \nu_2 RT$.

Подсказка 3: теплообмен с внешней средой отсутствует, поэтому внутренняя энергия гелия во всем сосуде не изменяется: $\frac{3}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{3}{2}\nu_2 RT_2 = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2)RT$.

Решение:

Так как давления гелия в первой и второй части сосуда равны (обозначим это значение p_1), то уравнения Менделеева-Клапейрона до выравнивания температур: $p_1V_1 = \nu_1 RT_1$, $p_1V_2 = \nu_2 RT_2$. Из этих уравнений следует, что $\frac{\nu_1 T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 T_2}{V_2}$.

Аналогично после выравнивания температур: $pV_2 = \nu_1 RT$, $pV_1 = \nu_2 RT$, и поэтому $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{V_2}{V_1}$.

Из двух полученных соотношений следует, что $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$. Поскольку по условию теплообмен с внешней средой отсутствует, а работу газы из частей сосуда совершают только друг на другом, то внутренняя энергия гелия во всем сосуде не изменяется. Значит,

$$\frac{3}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{3}{2}\nu_2 RT_2 = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2)RT,$$

поэтому

$$T = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{T_1\sqrt{T_2} + T_2\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} = \sqrt{T_1 T_2} \approx 400\,\text{К}.$$

ОТВЕТ: 400.

Задача 5 (4 балла) [влажный воздух, относительная влажность]

Во время прогулки в парке, которая длилась $T = 2$ часа, Д.И. Менделеев отметил, что он делает в среднем $n = 12$ вдохов в минуту. За один вдох Дмитрий Иванович вдыхал $V_1 = 2{,}5$ л воздуха. Воздух в парке имел относительную влажность $r = 50\,\%$ и температуру $t = 20^0 C$. Предположив, что выдыхаемый воздух имел влажность $r' = 100\,\%$ и температуру $t' = 36^0 C$, рассчитайте, сколько граммов воды надо выпить ученому после прогулки для полной компенсации ее потерь. Давление насыщенного водяного пара при этих температурах равно соответственно $p_H \approx 2{,}34$ кПа и $p'_H \approx 5{,}95$ кПа. Ответ округлить до целого значения.

Подсказка 1: давление водяного пара в воздухе можно определить по относительной влажности $p = rp_H(T)$.

Подсказка 2: масса воды в заданном объеме воздуха может быть вычислена с помощью уравнения Клапейрона-Менделеева.

Подсказка 3: из двух первых подсказок следует, что потеря воды за один вдох-выдох составляет $m_1 = \dfrac{\mu V_1}{R}\left(\dfrac{r' p'_H}{\theta'} - \dfrac{r p_H}{\theta}\right)$.

Решение:

Масса воды в заданном объеме воздуха может быть вычислена с помощью уравнения Клапейрона-Менделеева: $m = \dfrac{\mu pV}{R\theta} = \dfrac{\mu r p_H V}{R\theta}$. Поэтому за один вдох-выдох потеря воды составляет $m_1 = \dfrac{\mu V_1}{R}\left(\dfrac{r' p'_H}{\theta'} - \dfrac{r p_H}{\theta}\right)$.

Количество вдохов-выдохов, совершенных за прогулку $N = n \cdot \dfrac{T}{\tau}$ ($\tau \equiv 1$ мин). Итак:

$$M = m_1 N = \frac{\mu n T V_1}{R\tau}\left(\frac{r' p'_H}{\theta'} - \frac{r p_H}{\theta}\right) \approx 119\text{ г.}$$

ОТВЕТ: 119.

Задача 6 (4 балла) [уравнение теплового баланса, плавление, изменение температуры]

В калориметр, содержащий $M = 1$ кг воды с температурой $t_0 = 20°C$, бросают один за другим три кубика из сильно замороженного льда одинаковой массы $m = 100$ г (следующий кубик бросают после того, как установится равновесие, нарушенное предыдущим). Первый кубик растаял полностью, от второго осталась едва заметная льдинка (масса которой заметно меньше 1 г), третий совсем не таял. Какой будет масса льда в калориметре после установления теплового равновесия? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с окружающими телами пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг$\cdot °C$), удельная теплоемкость льда $c_Л = 2100$ Дж/(кг$\cdot °C$), удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 334$ кДж/кг. Ответ запишите в граммах, округлив до целого значения.

Подсказка 1: поскольку второй кубик растаял не до конца, то перед помещением в калориметр третьего кубика температура в калориметре опустилась до $t = 0°C$.

Подсказка 2: тепло, выделившееся при остывании воды $Q_{отд} = cM(t_0 - t)$ до бросания третьего кубика, пошло на нагрев двух кубиков льда от неизвестной начальной температуры t_1 до $t = 0°C$ и их плавление.

Подсказка 3: третий кубик нагревается до температуры $t = 0°C$ за счет замерзания воды.

Решение:

Поскольку второй кубик растаял не до конца, то перед помещением в калориметр третьего кубика температура в калориметре опустилась до $t = 0°C$. Пренебрегая массой оставшегося льда, запишем уравнение теплового баланса для этого этапа: тепло, выделившееся при остывании воды $Q_{отд} = cM(t_0 - t)$ пошло на нагрев кубиков льда от неизвестной начальной температуры t_1 до $t = 0°C$ и их плавление: $Q_{пол} = 2m[\lambda + c_Л(t - t_1)]$. Здесь $c_Л$ – удельная теплоемкость льда. Следовательно, $t_1 = \dfrac{\lambda}{c_Л} - \dfrac{cM}{2c_Л m} t_0$. Третий кубик нагревается до температуры $t = 0°C$ за счет замерзания воды. Обозначив массу льда, образовавшегося при этом замерзании, Δm, снова составляем уравнение теплового баланса: $\lambda \Delta m = c_Л m(t - t_1)$, откуда $\Delta m = \dfrac{c_Л m(-t_1)}{\lambda} = \dfrac{cMt_0}{2\lambda} - m$. Значит, полная масса льда в калориметре в конце процесса

$$m' = m + \Delta m = \frac{cMt_0}{2\lambda} \approx 126\,\text{г}.$$

ОТВЕТ: 126.

Задача 7 (4 балла) [давление насыщенных паров, изотерма]
В сосуде с гладкими вертикальными гладкими стенками под невесомым поршнем находится влажный воздух с температурой $T = 373$ К при давлении $p_1 = 10^5$ Па. При увеличении внешнего давления в два раза высота расположения поршня над дном сосуда уменьшилась в три раза. Найти относительную влажность воздуха в начальном состоянии. Температура постоянна. Ответ дайте в процентах, при необходимости округлив до целого значения.

Подсказка 1: давление насыщенного пара при заданной температуре равно $p_1 = 10^5$ Па.
Подсказка 2: поскольку при изотермическом уменьшении объема в три раза давление увеличилось только в два, то в процессе сжатия воздуха началась конденсация водяного пара.
Подсказка 3: давление сухого воздуха при сжатии увеличивается в три раза, а давление водяного пара – до $p_1 = 10^5$ Па.

Решение:

Давление насыщенного пара при заданной температуре равно $p_1 = 10^5$ Па. Если обозначить влажность воздуха в начальном состоянии r, а давление сухого воздуха в этом состоянии p_0, то $r \cdot p_1 + p_0 = p_1$. Поскольку при изотермическом уменьшении объема в три раза давление увеличилось только в два (не выполняется закон Бойля-Мариотта), то в процессе сжатия воздуха началась конденсация водяного пара. Поэтому в конечном состоянии давление водяного пара равно давлению насыщенного пара при данной температуре, то есть $p_1 = 10^5$ Па. А давление сухого воздуха возросло в три раза (в связи с уменьшением объема). Поэтому $p_1 + 3p_0 = 2p_1$. Исключая из двух полученных уравнений p_0, находим: $r = \dfrac{2}{3} \approx 67\,\%$.

ОТВЕТ: 67.

Задача 8 (5 баллов) [давление насыщенных паров, изотерма, закон сохранения энергии]
В сосуде с гладкими вертикальными стенками может свободно перемещаться поршень. Первоначально на покоящемся поршне был поставлен груз с массой, равной массе поршня, а под поршнем находились в равновесии одинаковые количества воды и водяного пара. При этом поршень располагался на высоте $h = 20$ см над дном сосуда. Груз аккуратно убирают с поршня, после чего температура смеси под поршнем поддерживается постоянной. Найти максимальную скорость, которую может достичь поршень в процессе подъема. Поверхность поршня, контактирующая с паром, всегда остается горизонтальной. Стенки сосуда достаточно высокие, чтобы поршень не выскакивал из него. Давлением и сопротивлением

воздуха, окружающего сосуд, можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g \approx 10$ м/с^2. Ответ выразить в м/с, округлив до сотых. **Указание:** Работа ν молей идеального газа с температурой T при изотермическом расширении от объема V_1 до V_2 вычисляется по формуле $A = \nu RT \cdot \ln(V_2 / V_1)$.

Подсказка 1: до того, как с поршня убрали груз, вес поршня (массу которого обозначим m) с грузом уравновешивался давлением насыщенного пара: $2mg = p_H S$.
Подсказка 2: на начальном этапе подъема поршня давление насыщенного пара поддерживается постоянным за счет испарения воды.
Подсказка 3: вода полностью испарится к моменту подъема поршня на высоту $h_1 = 2h$, и далее пар будет расширяться изотермически.
Подсказка 4: работа пара над поршнем $A = p_H S \cdot h + p_H S h_1 \ln\left(\frac{SH}{Sh_1}\right)$ идет на разгон поршня и увеличение его потенциальной энергии в поле тяжести.

Решение:

До того, как с поршня убрали груз, вес поршня (массу которого обозначим m) с грузом уравновешивался давлением насыщенного пара:

$$2mg = p_H S.$$

После снятия груза равновесие поршня нарушается, и он начинает двигаться вверх. Поскольку температура неизменна, давление насыщенного пара поддерживается постоянным за счет испарения воды. Поэтому вплоть до полного испарения воды поршень будет двигаться вверх под действием постоянной силы. Пренебрегая объемом воды в начальном состоянии (он намного меньше объема, занимаемого паром), находим, что вода полностью испарится к моменту подъема поршня на высоту $h_1 = 2h$. Далее пар будет расширяться изотермически, совершая работу над поршнем. К моменту подъема на высоту $H = 4h$ давление пара упадет в $\frac{H}{h_1} = 2$ раза, и в этот момент ускорение поршня упадет до нуля (сила давления пара будет уравновешивать вес поршня). Таким образом, до этой высоты поршень наверняка доедет, причем скорость его будет все время расти. Далее скорость поршня начнет убывать, и поэтому именно на высоте $H = 4h$ скорость подъема поршня максимальна. Увеличение механической энергии поршня к моменту подъема на эту высоту обусловлено работой пара на обеих стадиях подъема:

$$\frac{mv^2}{2} + mg(H-h) = p_H S \cdot h + p_H S h_1 \ln\left(\frac{SH}{Sh_1}\right) = 2mgh\left[1 + 2\ln\left(\frac{H}{2h}\right)\right].$$

Из этого соотношения легко выражаем:

$$v^2 = 2g\left[4h\ln\left(\frac{H}{2h}\right) + 3h - H\right] = 2gh[4\ln(2) - 1] \approx 2{,}66 \text{ м/с}.$$

ОТВЕТ: 2,66.