10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 4 (27.01.2018).

Тема: «ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ. СОУДАРЕНИЯ.»

Задача 1 (2 балла) [закон сохранения импульса, неупругое соударение, закон сохранения энергии]

Два небольших шарика из пластилина подвешены на легких нитях одинаковой длины, так, что они слегка касаются друг друга. Один из них (массой $m = 50\,\text{г}$) отвели от вертикали на натянутой нити так, что он поднялся на высоту $h = 72\,\text{см}$ и отпустили без начальной скорости. После его лобового удара о другой шарик (массой $M = 550\,\text{г}$) они слиплись и далее двигались вместе. Найти максимальную высоту, на которую они поднимутся? Ответ записать в сантиметрах в виде десятичной дроби, округлив до десятых. Сопротивлением воздуха пренебречь. Длина каждой нити больше 80 см.

Подсказка 1: закон сохранения энергии для движения первого шара от отпускания до удара дает: $mgh = \dfrac{mv^2}{2}$.

Подсказка 2: закон сохранения импульса при неупругом ударе шаров $mv = (m+M)V$.

Подсказка 3: закон сохранения энергии для движения слипшихся шаров от удара до остановки: $\dfrac{(m+M)V^2}{2} = (m+M)gh'$.

Решение:

Условие, что длина каждой нити больше 80 см, позволяет считать нити всегда натянутыми (при подъеме выше длины нити нить после отпускания сразу бы провисла). Запишем законы сохранения для разных процессов: закон сохранения энергии для движения первого шара от отпускания до удара: $mgh = \dfrac{mv^2}{2}$ (здесь v - скорость шара перед ударом); закон сохранения импульса при неупругом ударе (закон сохранения механической энергии не работает!): $mv = (m+M)V$; закон сохранения энергии для движения слипшихся шаров от удара до остановки: $\dfrac{(m+M)V^2}{2} = (m+M)gh'$. Исключая скорости из этих соотношений, получаем: $m^2h = (m+M)^2h'$. Отсюда выражаем искомую величину: $h' = \left(\dfrac{m}{M+m}\right)^2 h = 0{,}2\,\text{см}$.

ОТВЕТ: 0,2.

Задача 2 (3 балла) [упругое соударение, выбор системы отсчета, закон сохранения энергии]

Два небольших по размеру шарика имеют очень разные массы (один очень сильно тяжелее другого). Их подвесили рядом (они слегка касаются друг друга) на невесомых нерастяжимых нитях. Потом развели их в стороны на натянутых нитях так, что оба оказались на высоте $h = 10\,\text{см}$ над положением равновесия, и отпустили без начальной скорости. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти высоту максимального подъема легкого шарика. Длина каждой из нитей более 1 м. Ответ запишите в сантиметрах в виде целого числа.

Подсказка 1: закон сохранения энергии для движения любого из шаров от отпускания до удара дает: $mgh = \dfrac{mv^2}{2}$.

Подсказка 2: «очень тяжелый» шар играет роль «стенки», на которую легкий шар падает «нормально».
Подсказка 3: столкновение нужно рассматривать в системе отсчета, связанной со «стенкой», и в этой СО скорость падения «легкого» шара на «стенку» равна $v' = 2\sqrt{2gh}$.

Решение:

Запишем закон сохранения энергии для движения любого из шаров от отпускания до удара: $mgh = \frac{mv^2}{2}$ (здесь v - скорость шара перед ударом). Как видно, $v = \sqrt{2gh}$. Поскольку масса сократилась, то этот результат справедлив для обоих шаров. При описании столкновения нам нужно перейти в систему отсчета, связанную со «стенкой» (роль которой играет очень тяжелый шар). В ней легкий шар налетают на «стенку» со скоростью $v' = 2\sqrt{2gh}$. Так как удар лобовой (падение на «стенку» нормальное), то после удара в этой системе отсчета легкий шар будет двигаться с такой же по величине скоростью, но в другую сторону. Возвращаясь в исходную систему отсчета, обнаруживаем, что относительно Земли легкий шар после удара начинает обратное движение со скоростью $V = 3\sqrt{2gh}$. Максимальная высота его подъема находится из новой записи закона сохранения энергии: $mgH = \frac{mV^2}{2}$, откуда $H = 9h = 90$ см. Так как это меньше длины нити, то шарик действительно поднимается на эту высоту (нить «по дороге» не провисает и не достигает положения «вертикально вверх»).
ОТВЕТ: 90.

Задача 3 (3 балла) [неупругое соударение, закон сохранения импульса]
Две небольшие пластилиновые шайбы скользили по гладкой горизонтальной поверхности и столкнулись. До соударения скорость «второй» шайбы была в два раза больше, чем у «первой» и направлена под углом $\alpha = 120°$ к ней. После соударения шайбы слиплись и скорость их движения оказалась равна скорости первой шайбы. Найти соотношение масс первой и второй шайб (m_1 / m_2). Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до сотых.

Подсказка 1: следует начать с записи закона сохранения импульса в векторной форме или с изображения векторного треугольника импульсов тел.
Подсказка 2: дальше можно возвести векторное соотношение в квадрат либо тля треугольника импульсов воспользоваться теоремой косинусов.
Подсказка 3: в любом случае получится уравнение $(m_1 + m_2)^2 v^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha$.

Решение:

Запишем закон сохранения импульса в векторной форме и возведем его уравнение скалярно в квадрат: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p} \Rightarrow (m_1 + m_2)^2 v^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha$. Такое же уравнение можно получить, изобразив векторный треугольник импульсов и воспользовавшись теоремой косинусов. Используя условия $v = v_1$, $v_2 = 2v_1$ и то, что $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, получаем:

$$(m_1 + m_2)^2 = m_1^2 + 4m_2^2 - 2m_1 m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{4}.$$

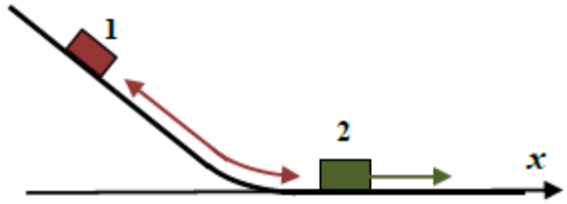
ОТВЕТ: 0,75.

Задача 4 (4 балла) [закон сохранения импульса, неупругое соударение]
Маленький брусок 1 скатывается без начальной скорости с некоторой высоты по наклонной гладкой плоскости, плавно переходящей в гладкую горизонтальную поверхность. На горизонтальной поверхности покоился другой маленький брусок 2. Произошло два упругих

соударения между брусками, и в результате брусок 1 остановился. Найти отношение масс брусков 2 и 1. Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до сотых.

Подсказка 1: сначала необходимо решить стандартную задачу о упругом лобовом ударе для первого соударения, причем ясно, что после него налетающий брусок должен отскочить назад.
Подсказка 2: «с помощью» наклонной плоскости брусок 1 снова вернется на горизонтальный участок, причем он должен догнать брусок 2, чтобы второе соударение произошло.
Подсказка 3: нужно решить задачу для второго удара с учетом того, что конечная скорость бруска 1 по условию равна нулю, причем из корней полученного уравнения нужно выбрать то, при котором второе соударение действительно возможно.

Решение:



Пусть брусок 1 за время скатывания с наклонной плоскости набрал скорость v_0. Обозначим массы брусков 1 и 2 соответственно m и M. Будем записывать скорости брусков в проекции на ось x, направленную вдоль горизонтальной поверхности по направлению первоначального движения бруска 1. Тогда после первого соударения скорости брусков определяются из законов сохранения энергии и импульса:

$$\left\{\begin{array}{l} mv_0 = mv_1 + MV_1 \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{MV_1^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{m-M}{M+m} v_0 \\ V_1 = \dfrac{2m}{M+m} v_0 \end{array}\right. .$$

Если $m \geq M$, то второго соударения точно не будет, поскольку $V_1 > v_1 \geq 0$. При $m < M$ брусок 1, «отразившись» от наклонной плоскости, поменяет знак скорости: $v_1' = \dfrac{M-m}{M+m} v_0$ и догонит брусок 2, если горизонтальная поверхность достаточно длинная и $v_1' > V_1$. Подставив в это требование выражения для скоростей, получим, что второе соударение произойдет при $M - m > 2m \Rightarrow M > 3m$. Кроме того, при втором соударении скорость бруска 1 должна стать равной нулю (можно, конечно, из законов сохранения для второго соударения найти в общем виде, что $v_2 = \dfrac{6Mm - M^2 - m^2}{(M+m)^2} v_0$ и приравнять это значение к нулю, но несколько проще сразу учесть в уравнениях нулевое значение этой скорости):

$$\left\{\begin{array}{l} mv_1' + MV_1 = MV_2 \\ \dfrac{mv_1'^2}{2} + \dfrac{MV_1^2}{2} = \dfrac{MV_2^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{M}{m} - 1\right) v_1'^2 - 2\frac{M}{m} V_1 v_1' = 0 \Rightarrow \left(\frac{M}{m}\right)^2 - 6\frac{M}{m} + 1 = 0 .$$

Это квадратное уравнение имеет два корня: $\dfrac{M}{m} = 3 \pm \sqrt{8}$, но только больший из них соответствует выполнению условия, обеспечивающего возможность второго соударения, поэтому выбираем именно его: $\dfrac{M}{m} = 3 + \sqrt{8} \approx 5{,}83$.

ОТВЕТ: 5,83.

Задача 5 (4 балла) [закон сохранения импульса, упругое соударение, закон сохранения энергии, косой удар]

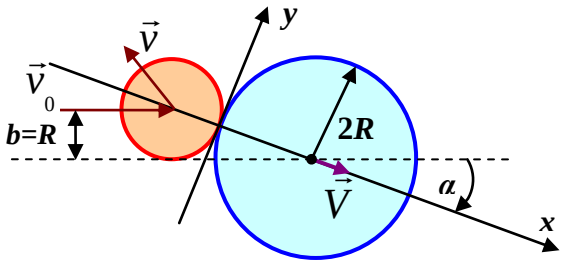
Упругий гладкий шар со скоростью $v_0 = 2$ м/с налетает на покоящийся шар вдвое большего радиуса, изготовленный из того же материала. Происходит косой удар, причем прицельный параметр равен радиусу налетающего шара. Найти скорость меньшего из шаров после соударения. Ответ выразить в м/с, округлив до сотых.

Подсказка 1: масса покоящегося шара в 8 раз больше массы налетающего, а угол между линией удара и направлением начального движения налетающего шара $\alpha = \arcsin(1/3)$.

Подсказка 2: силы взаимодействия шаров направлены вдоль прямой, проходящей через их центры в момент соударения, поэтому компоненты скоростей шаров, перпендикулярные этой прямой, не изменяются.

Подсказка 3: задача для компонент скоростей вдоль линии удара полностью аналогична «стандартной» задаче о лобовом упругом соударении.

Решение:



Пусть масса налетающего шара равна m. Тогда масса покоящегося, очевидно, равна $8m$. Так как силы трения между шарами нет, то покоящийся шар начнет двигаться по линии удара, которая совпадает с прямой, проходящей через центры шаров в момент соударения. Удобно анализировать соударение в проекции на эту линию (ось x) и перпендикуляр к ней (ось y, как показано на рисунке). Обозначим α угол между линией удара и направлением начального движения шара. Из геометрического анализа видно, что $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. В проекции на ось y компоненты скорости шаров не изменяются, то есть

$v_y = v_0 \sin\alpha = \frac{1}{3} v_0$, $V_y = 0$. Задача для x-компонент скоростей полностью аналогична «стандартной» задаче о лобовом упругом соударении, поэтому, используя соответствующие формулы, находим: $v_x = \frac{m-8m}{m+8m} v_0 \cos\alpha = -\frac{14\sqrt{2}}{27} v_0$, $V_x = \frac{2m}{m+8m} v_0 \cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{27} v_0$.

Таким образом, конечная скорость меньшего шара $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{473}}{27} v_0 \approx 1{,}61$ м/с.

ОТВЕТ: 1,61.

Задача 6 (5 баллов) [закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, упругое соударение]

На гладком горизонтальном стержне покоятся две упругие шайбы A и B. Третья шайба C (в точности такая же, как B) скользит по стержню и сталкивается с A, после чего A сталкивается с B, и больше соударений нет. Скорость шайбы B после этого оказалась меньше скорости C до начала соударений в $z = 1.8$ раза. Найти отношение масс шайб A и B.

Подсказка 1: первое соударение (C с массой m и A с массой M) можно рассмотреть на базе законов сохранения энергии и импульса либо с помощью перехода в систему центра масс, и

в любом случае скорости этих шайб после соударения $\begin{cases} v_1 = \dfrac{m-M}{M+m} v_0 \\ V_1 = \dfrac{2m}{M+m} v_0 \end{cases}$, где v_0 – начальная скорость шайбы С.

Подсказка 2: второе соударение (А и В) описывается точно так же, и соотношение скоростей $z = \dfrac{(M+m)^2}{4Mm}$.

Подсказка 3: из полученного уравнения можно найти соотношение масс, причем только один из корней удовлетворяет условию, что второе соударение будет последним.

Решение:

Пусть $m_B = m_C \equiv m$, $m_A \equiv M$, а начальная скорость шайбы С равна v_0. Тогда после первого соударения (шайбы С с шайбой А) скорости шайб стали равны (здесь и далее скорости записываются в проекции на ось, направленную вдоль стержня по направлению первоначального движения шайбы С):

$$\left\{ \begin{array}{c} mv_0 = mv_1 + MV_1 \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{MV_1^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{m-M}{M+m} v_0 \\ V_1 = \dfrac{2m}{M+m} v_0 \end{cases}.$$

Аналогично рассматривая столкновение А с В, найдем, что скорость шайбы В после этого соударения

$$v_2 = \frac{2M}{M+m} V_1 = \frac{4Mm}{(M+m)^2} v_0.$$

По условию $\dfrac{v_0}{v_2} = z \Rightarrow \dfrac{(M+m)^2}{4Mm} = z \Rightarrow \left(\dfrac{M}{m}\right)^2 - 2(2z-1)\dfrac{M}{m} + 1 = 0$. Таким образом, для отношения масс получаются два значения

$$\frac{M}{m} = 2z - 1 \pm 2\sqrt{z(z-1)} = 2{,}6 \pm 2{,}4.$$

Нетрудно, однако, заметить, что меньшее значение $\dfrac{M}{m} = \dfrac{1}{5}$ соответствует ситуации, когда шайба С после соударения продолжает двигаться в первоначальном направлении, а шайба А после удара о В движется ей навстречу, и поэтому соударение А с В явно не будет последним. Поэтому условию задачи отвечает только один корень

$$\frac{M}{m} = 5.$$

ОТВЕТ: 5.

Задача 7 (3 балла) [закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, неупругое соударение]

При лобовом соударении гладкого шара, двигавшегося поступательно со скоростью $V_0 = 2$ м/с с таким же покоящимся шаром $\delta = \dfrac{7}{32}$ от первоначальной кинетической энергии перешло в тепло. Найти относительную скорость движения шаров после соударения. Ответ выразить в м/с, с точностью до десятых.

Подсказка 1: уравнения, следующие из законов сохранения, имеют вид:

$$\cdot \left\{ \begin{array}{c} mV_0 = mV_1 + mV_2 \\ \dfrac{mV_0^2}{2} = \dfrac{mV_1^2}{2} + \dfrac{mV_2^2}{2} + \delta \cdot \dfrac{mV_0^2}{2} \end{array} \right. \cdot$$

Подсказка 2: из этих уравнений можно получить одно квадратное уравнение, корнями которого будут конечные скорости шаров.
Подсказка 3: нужно учесть, что скорость первоначально покоящегося шара после столкновения (V_2) должна быть больше, чем у налетающего (V_1).

Решение:

Записывая законы сохранения энергии (с учетом перехода механической энергии в тепло) и импульса, получаем:

$$\left\{\begin{array}{c} mV_0 = mV_1 + mV_2 \\ \dfrac{mV_0^2}{2} = \dfrac{mV_1^2}{2} + \dfrac{mV_2^2}{2} + \delta\cdot\dfrac{mV_0^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} V_2 = V_0 - V_1 \\ V_1^2 - V_0V_1 + \dfrac{\delta}{2}V_0^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_{1,2} = \frac{V_0}{2}[1 \mp \sqrt{1-2\delta}]$$

(здесь учтено, что скорость первоначально покоящегося шара после столкновения (V_2) должна быть больше, чем у налетающего (V_1)). Подставляя значения: $V_1 = 0{,}25$ м/с, $V_2 = 1{,}75$ м/с. Значит, $V_{от} = V_2 - V_1 = V_0\sqrt{1-2\delta} = 1{,}5$ м/с.

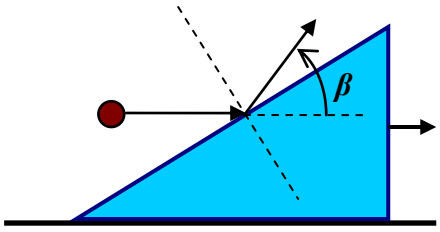
ОТВЕТ: 1,5.

Задача 8 (6 баллов) [закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, упругое соударение, силы реакции]

Небольшой шарик массы m ударился о наклонную поверхность гладкого клина, покоившегося на гладкой горизонтальной поверхности. Непосредственно перед ударом шарик двигался горизонтально, а наклонная поверхность клина составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Какова должна быть масса клина, чтобы шарик при следующем столкновении с клином ударился о ту же точку, что и в этот раз? После удара клин движется поступательно, препятствий на пути клина и шарика нет, сопротивление воздуха пренебрежимо мало. В ответе запишите отношение массы шарика к массе клина в виде целого числа.

Подсказка 1: нужно записать законы сохранения горизонтальной проекции импульса и энергии, и добавить к ним закон сохранения проекции импульса шарика на поверхность клина.
Подсказка 2: удар о ту же точку клина после полета шарика по параболе в поле тяжести возможен только в том случае, если горизонтальная составляющая скорости шарика после удара равна скорости клина после удара.
Подсказка 3: если v и V - скорости шарика и клина после соударения, β - угол, который вектор $\vec{v}$ составляет с горизонталью, то требование из подсказки 2 ($V = v\cos\beta$) вместе с законом сохранения проекции горизонтальной компоненты импульса ($mv_0 = MV + mv\cos\beta$) сразу позволяют выразить V.

Решение:



Пусть v и V - скорости шарика и клина после соударения, β - угол, который вектор $\vec{v}$ составляет с горизонталью ($\vec{V}$ очевидно направлен горизонтально). Запишем законы сохранения горизонтальной проекции импульса и энергии:

$$\left\{\begin{array}{c} mv_0 = MV + mv\cos\beta \\ \dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{MV^2}{2} \end{array}\right.$$

(здесь M - масса клина). Кроме того, условие гладкости клина (то есть условие того, что в процессе удара на шарик со стороны клина действовала только сила нормальной реакции) позволяет заключить, что сохраняется проекция импульса шарика на поверхность клина: $v\cos(\beta-\alpha)=v_0\cos\alpha$. Наконец, заметим, что удар о ту же точку клина после полета шарика по параболе в поле тяжести возможен только в том случае, если $V=v\cos\beta$. С учетом этого соотношения из первого уравнения сразу находим что $V=v\cos\beta=\dfrac{m}{M+m}v_0$. Тогда из второго уравнения, исключая V, получим:

$$v=\frac{\sqrt{M^2+Mm+m^2}}{M+m}.$$

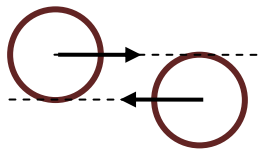
Тогда $\cos\beta=\dfrac{m}{\sqrt{M^2+Mm+m^2}}$, а $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{\dfrac{M(M+m)}{M^2+Mm+m^2}}$. Наконец, подставляем все это в третье уравнение и находим:

$$m\cos\alpha+\sqrt{M(M+m)}\sin\alpha=(M+m)\cos\alpha\Rightarrow M=\frac{m}{ctg^2\alpha-1}=\frac{m}{2}.$$

ОТВЕТ: 2.

Задача 9 (6 баллов) [закон сохранения импульса, геометрия соударения, сила трения, вращение]

Два одинаковых упругих колечка радиуса R с шероховатой боковой поверхностью скользят навстречу друг другу по гладкой горизонтальной поверхности с одинаковыми по величине скоростями v_0. Линии движения центров колечек проходят по касательной к ним (см. рисунок). После удара они начали **вращаться** с угловыми скоростями $\omega=\dfrac{v_0}{4R}$. Найти величину скоростей движения центров масс колечек после удара v. В ответе укажите отношение v/v_0 в виде десятичной дроби с точностью до десятых.



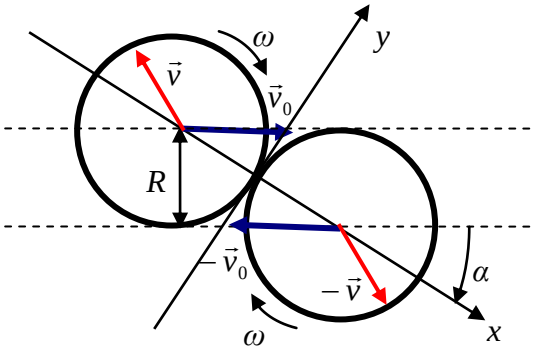
Подсказка 1: важно учесть геометрию соударения и использовать систему координат, оси которой направлены: одна (x) – вдоль прямой, проходящей через центры колец в момент удара, а другая (y) – перпендикулярно ей.

Подсказка 2: кольца взаимодействуют посредством парных сил нормальной реакции (величина N, направлены вдоль оси x) и трения (величина $F_{тр}$, направлены вдоль оси y).

Подсказка 3: вращение колец появляется только благодаря силам трения, поэтому движение вдоль оси x происходит независимо от вращения и движения по оси y, то есть как при обычном упругом лобовом ударе тел одинаковой массы.

Подсказка 4 проекция скорости первого кольца на ось y уменьшается за счет действия силы трения, и эта же сила изменяет скорость вращения этого кольца ωR.

Решение:



Рассмотрим геометрию удара колец. Используем декартовы координаты (x, y), причем ось x направим вдоль прямой, проходящей через центры колец в момент удара, а ось y – перпендикулярно ей. Кольца взаимодействуют посредством парных сил нормальной реакции (величина N, направлены вдоль оси x) и трения (величина $F_{тр}$, направлены вдоль оси y). Вращение колец появляется только благодаря силам трения, поэтому движение вдоль оси x происходит независимо от вращения и движения по оси y, то есть как при обычном упругом лобовом ударе тел одинаковой массы. Введем обозначения: пусть m – масса каждого из колец, $\vec{v}_0$ - скорость «первого» кольца до удара, $\vec{v}$ - его скорость после удара (из симметрии системы яи закона сохранения импульса ясно, что скорости «второго» кольца – это $-\vec{v}_0$ и $-\vec{v}$ соответственно), ω - угловые скорости колец после удара (соударение нецентральное, и за счет сил трения оба кольца начнут вращаться по часовой стрелке). Угол между $\vec{v}_0$ и осью x $\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{2R}\right) = \frac{\pi}{6}$. Тогда из анализа движения по оси x следует, что $v_x = -v_0 \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_0$. Проекция скорости первого кольца на ось y уменьшается за счет действия силы трения, и эта же сила изменяет скорость вращения этого кольца ωR. Заметим также, что при «разгоне» вращения все массы кольца двигаются вокруг центра с одинаковыми скоростями и ускорениями в любой момент времени. Поэтому:

$$\left\{\begin{array}{c} mv_y - mv_0 \sin\alpha = -F_{тр} \cdot \Delta t \\ mR\omega = F_{тр} \cdot \Delta t \end{array}\right\} \Rightarrow v_y = v_0 \sin\alpha - R\omega = \frac{v_0}{4}$$

(здесь Δt - длительность времени скольжения колец друг по другу). Значит, величина скорости центра масс первого кольца $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{13}}{4} v_0$. Ясно, что у второго кольца скорость такая же. Итак, $\frac{v}{v_0} = \frac{\sqrt{13}}{4} \approx 0{,}9$.

ОТВЕТ: 0,9.