

10-11 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Робофест» по физике

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 3 (20.01.2018).

Тема: «СИЛЫ И ДВИЖЕНИЕ. РОЛЬ СИЛ ТРЕНИЯ. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ.»

Задача 1 (3 балла) [уравнение движения, сила трения, равноускоренное движение]

Небольшое тело запускают вверх вдоль наклонной плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, со скоростью $v_0 = 5$ м/с. Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0,5$. С какой скоростью будет двигаться тело к моменту возвращения в исходную точку? Тело не покидает плоскость. Ответ запишите в м/с, с точностью до сотых.

Подсказка 1: на тело действуют: сила тяжести, сила нормальной реакции плоскости (она всегда уравнивает перпендикулярную плоскости составляющую силы тяжести, то есть $N = mg \cdot \cos(\alpha)$, где m – масса тела), сила трения (направлена против движения, и во время движения всегда равна $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cdot \cos(\alpha)$).

Подсказка 2: при движении вверх ускорение тела равно

$$a_1 = -\frac{F_{\text{тр}} + mg \cdot \sin(\alpha)}{m} = -g[\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)].$$

Подсказка 3: так как $\mu < \tan(\alpha)$, то тело после остановки поедет вниз.

Решение:

На тело действуют: сила тяжести, сила нормальной реакции плоскости (она всегда уравнивает перпендикулярную плоскости составляющую силы тяжести, то есть $N = mg \cdot \cos(\alpha)$, где m – масса тела), сила трения (направлена против движения, и во время движения всегда равна $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cdot \cos(\alpha)$). При движении вверх тело тормозит не только сила трения, но и составляющая силы тяжести вдоль плоскости, то есть ускорение

тела равно $a_1 = -\frac{F_{\text{тр}} + mg \cdot \sin(\alpha)}{m} = -g[\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)]$. Поэтому скорость тела упадет до

нуля (тело остановится) за время $t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g} \frac{1}{\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)}$. За время t_1 тело сместится

относительно поверхности вверх на расстояние $s_1 = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g[\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)]}$. Так

как $\mu < \tan(\alpha)$, то тело после остановки поедет вниз, и теперь сила тяжести разгоняет тело, а

сила трения тормозит, поэтому $a_2 = \frac{mg \cdot \sin(\alpha) - F_{\text{тр}}}{m} = g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]$. Для возвращения

в исходную точку тело должно пройти тот же путь: $s_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g[\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)]}$, откуда

находим, что набранная в ходе возвращения скорость $v_2 = v_0 \sqrt{\frac{\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \mu \cos(\alpha)}}$. Подставляя

данные, получаем: $v_2 = v_0 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = v_0 (2 - \sqrt{3}) \approx 1,34$ м/с.

ОТВЕТ: 1,34.

Задача 2 (4 балла) [уравнение движения, равноускоренное движение, сила трения]

Три одинаковые длинные доски покоятся на горизонтальной поверхности, одна на другой (см. рисунок). По нижней доске наносят резкий удар, сообщая ей скорость $v_0 = 3 \text{ м/с}$, направленную по ее осевой линии. Доски пришли в движение. Спустя какое время это движение прекратится? Коэффициент трения между досками, как и коэффициент трения между нижней доской и поверхностью равен $\mu = 0,5$. Доски в течении всего времени движутся поступательно. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Ответ записать в секундах с точностью до десятых.



Подсказка 1: движение нижней доски тормозится двумя силами трения скольжения, движение средней – разгоняется силой трения со стороны нижней и тормозится силой трения со стороны верхней, а верхней – разгоняется силой трения со стороны средней.

Подсказка 2: проскальзывание досок прекращается в момент времени, когда их скорости выравниваются.

Подсказка 3: после прекращения взаимного проскальзывания доски продолжают двигаться вместе, как тело массой $3m$, под действием одной тормозящей силы трения.

Решение:

После удара нижняя доска начнет скользить по поверхности, одновременно выскальзывая из-под средней. Поэтому ее движение тормозится двумя силами трения скольжения. Уравнение движения этой доски вдоль горизонтальной оси $ma_1 = -\mu \cdot 3mg - \mu \cdot 2mg = -5\mu mg$ (m – одинаковая масса досок) позволяет найти ее ускорение $a_1 = -5\mu g$. Закон изменения ее скорости $v_1(t) = v_0 - 5\mu gt$. В то же время средняя доска разгоняется силой трения со стороны нижней и тормозится силой трения со стороны верхней, а верхняя доска разгоняется силой трения со стороны средней. Изначально мы не знаем, поедут средняя и верхняя доски с одинаковым ускорением или с разным. Однако можно заметить, что сила трения со стороны нижней (равная $2\mu mg$) может разогнать обе доски (суммарной массой $2m$) до ускорения μg . У верхней доски это ускорение должна в этом случае создавать сила трения покоя, равная μmg , и эта величина для нее является допустимой ($F_{\text{тр}} \leq \mu N = \mu mg$). Значит, средняя и верхняя доски действительно поедут вместе с ускорением $a_2 = a_3 = +\mu g$, и поэтому $v_2(t) = v_3(t) = \mu gt$. Проскальзывание досок прекращается в момент времени t_1 , когда их скорости выравниваются: $v_0 - 5\mu gt_1 = \mu gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{6\mu g}$. К этому моменту скорости

всех трех досок $v_1(t_1) = v_2(t_1) = v_3(t_1) = \frac{v_0}{6}$. По условию, доски движутся поступательно (верхняя и средняя доски остаются горизонтальными, то есть не «сваливаются» с нижней). Поэтому далее они продолжают двигаться вместе, как тело массой $3m$, под действием одной тормозящей силы трения, и их общее ускорение $a = -\mu g$. Поэтому они остановятся за время

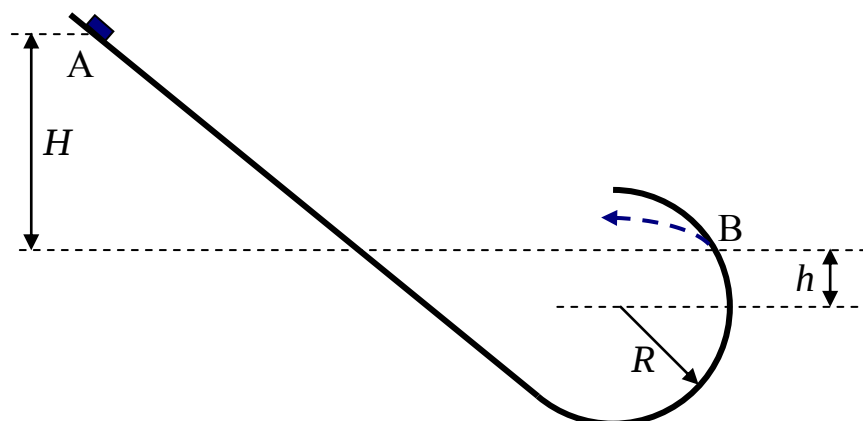
$$t_2 = \frac{v_0}{6\mu g}, \text{ а общее время движения } t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{3\mu g} \approx 0,2 \text{ с.}$$

ОТВЕТ: 0,2.

Задача 3 (4 балла) [закон сохранения энергии, центростремительное ускорение, отрыв от поверхности]

Тело массой $m = 1 \text{ кг}$ соскальзывает по наклонному желобу, плавно переходящему в закругление радиуса $R = 0,5 \text{ м}$, проходящее в одной вертикальной плоскости с желобом. Поднимаясь по закруглению, тело отрывается от желоба в точке, расположенной на высоте $h = 0,25 \text{ м}$ над центром закругления (см.рисунок). Известно, что соскальзывание началось без

начальной скорости из точки на высоте $H = 1\text{ м}$ над точкой отрыва. Найти модуль работы сил трения за все время скольжения тела от начала скольжения до отрыва. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10\text{ м/с}^2$. Ответ привести в Джоулях.



Подсказка 1: изменение механической энергии тела на пути от точки старта (А) к точке отрыва (В) обусловлено именно работой сил трения, величину которой надо найти, поэтому:

$$mgH - \frac{mv_B^2}{2} = |A_{\text{тр}}|.$$

Подсказка 2: в точке В сила нормальной реакции поверхности закругления обращается в ноль, и поэтому центростремительная компонента ускорения создается только силой

тяжести: $m \frac{v_B^2}{R} = mg \cos \alpha$.

Подсказка 3: должно быть ясно, что α - угол между радиусом закругления, проведенным в точку В, и вертикалью, то есть $\cos \alpha = \frac{h}{R}$.

Решение:

Изменение механической энергии тела на пути от точки старта (А) к точке отрыва (В) обусловлено именно работой сил трения, величину которой надо найти, поэтому:

$$mgH - \frac{mv_B^2}{2} = |A_{\text{тр}}| \quad (\text{в точке А скорость равна нулю, а } H - \text{ как раз разность высот точек А и В}).$$

С другой стороны в точке В сила нормальной реакции поверхности закругления обращается в ноль, и поэтому центростремительная компонента ускорения создается только

силой тяжести: $m \frac{v_B^2}{R} = mg \cos \alpha$, где α - угол между радиусом закругления, проведенным в

точку В, и вертикалью. Из геометрии ясно, что $\cos \alpha = \frac{h}{R}$. Объединяя эти соотношения,

получим: $|A_{\text{тр}}| = mg \left(H - \frac{h}{2} \right) = 8,75\text{ Дж}.$

Ответ: 8,75.

Задача 4 (4 балла) [уравнение движения, равноускоренное движение, сила трения]

Полноприводной автомобиль массой $m = 400\text{ кг}$ едет вверх по прямолинейному участку дороги с уклоном к горизонту на угол $\alpha = \arcsin(0,2) \approx 11,5^\circ$. Скорость автомобиля $v_1 = 6\text{ м/с}$ постоянна. При этом его колеса не проскальзывают, а полезная мощность двигателя (то есть мощность, передаваемая на оси колес) равна $P_1 = 16\text{ кВт}$. Выжав педаль газа, водитель увеличил полезную мощность двигателя в полтора раза. Колеса начали проскальзывать, но спустя время $t = 1\text{ с}$ проскальзывание прекратилось. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите коэффициент трения шин о дорогу. Ответ запишите в виде десятичной дроби с точностью до десятых.

Подсказка 1: если колеса не проскальзывают, то сила трения колес меньше силы трения скольжения и связана с мощностью: $P = F_{mp} v \Rightarrow F_{mp} = \frac{P}{v}$.

Подсказка 2: в режиме проскальзывания колес автомобиль движется с постоянным ускорением $a = \frac{\mu mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha)}{m} = [\mu \cos(\alpha) - \sin(\alpha)]g$.

Подсказка 3: переход от одного режима к другому происходит при «критической» скорости $v_c = \frac{P}{\mu mg \cos(\alpha)}$.

Решение:

Если все колеса одинаковы и нагружены равномерно, то они начинают проскальзывать одновременно. Если колеса не проскальзывают, то сила трения колес меньше силы трения скольжения и связана с мощностью: $P = F_{mp} v \Rightarrow F_{mp} = \frac{P}{v}$. Поскольку $F_{mp} \leq \mu mg \cos(\alpha)$, то

разгон без проскальзывания реализуется при скоростях $v \geq v_c = \frac{P}{\mu mg \cos(\alpha)}$. Таким образом,

для нашего автомобиля $\frac{P_1}{\mu mg \cos(\alpha)} \leq v_1 < \frac{3P_1}{2\mu mg \cos(\alpha)}$. В режиме проскальзывания колес автомобиль движется с постоянным ускорением

$$a = \frac{\mu mg \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha)}{m} = [\mu \cos(\alpha) - \sin(\alpha)]g.$$

Значит, разгон до новой «критической» скорости $v'_c = \frac{3P_1}{2\mu mg \cos(\alpha)}$ продлится в течении времени

$$t = \frac{1}{[\mu \cos(\alpha) - \sin(\alpha)]g} \left(\frac{3P_1}{2\mu mg \cos(\alpha)} - v_1 \right).$$

Из этого соотношения получаем квадратное уравнение относительно коэффициента трения:

$$\mu^2 + \left(\frac{v_1}{gt} - \sin(\alpha) \right) \frac{\mu}{\cos(\alpha)} - \frac{3P_1}{2mg^2 t \cos^2(\alpha)} = 0.$$

Нам нужен его положительный корень

$$\mu = \frac{1}{2gt \cos(\alpha)} \left(gt \sin(\alpha) - v_1 + \sqrt{[v_1 - gt \sin(\alpha)]^2 + \frac{6P_1 t}{m}} \right) \approx 0,6.$$

(здесь учтено, что $\sin(\alpha) = 0,2$ и $\cos(\alpha) = \sqrt{0,96} \approx 0,98$).

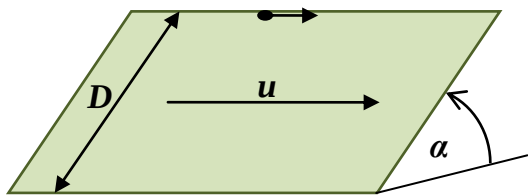
На самом деле этот ответ – заниженная оценка, так как при указанных скоростях пренебрежение силой сопротивления воздуха не очень реалистично. Тем не менее, эта задача позволяет лучше разобраться в роли силы трения в движении машин.

ОТВЕТ: 0,6.

Задача 5 (4 балла) [системы отсчета, уравнение движения, равноускоренное движение, сила трения]

Лента транспортера, движущаяся с постоянной скоростью $u = 1 \text{ м/с}$, наклонена (поперек движения) под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Ширина ленты равна $D = 1,8 \text{ м}$. На эту ленту запускают у верхнего края маленькую шайбу, начальная скорость которой относительно неподвижного наблюдателя точно равна скорости ленты. На какое расстояние сместится шайба по горизонтали (относительно этого наблюдателя) к тому моменту, когда она достигнет нижнего края ленты? Коэффициент трения между шайбой и лентой равен

$\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,289$. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Ответ запишите в метрах с точностью до десятых.



Подсказка 1: для анализа движения шайбы удобно перейти в систему отсчета, связанную с лентой.

Подсказка 2: в этой СО шайба будет скользить вниз по линии «падения воды» под действием сил тяжести, нормальной реакции ленты и трения.

Подсказка 3: ускорение шайбы вдоль этой линии $a'_y = \frac{mg \sin(\alpha) - \mu N}{m} = g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]$.

Решение:

Перейдем в систему отсчета, связанную с лентой (с координатными осями x' и y' – см. рисунок). В ней шайба изначально покоится. Значит, она в этой системе будет скользить вниз по оси y' (то есть $x'(t) \equiv 0$) под действием сил тяжести, нормальной реакции ленты и трения. Ее ускорение вдоль оси y' постоянно и равно

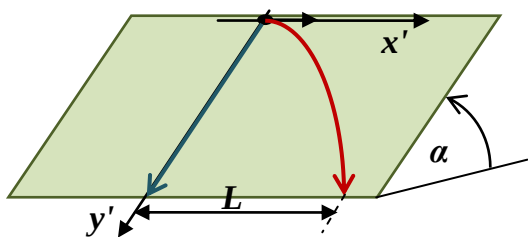
$$a'_y = \frac{mg \sin(\alpha) - \mu N}{m} = \frac{mg \sin(\alpha) - \mu mg \cos(\alpha)}{m} = g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)].$$

Начальная скорость по этой оси равна нулю, так что закон движения $y'(t) = \frac{g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]t^2}{2}$. Подставляя значение $y'(t) = D$, находим время

соскальзывания до нижнего края ленты: $t = \sqrt{\frac{2D}{g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]}}$. Вернемся в систему

отсчета, связанную с неподвижным наблюдателем. Ясно, что для аналогичных координатных осей в этой системе $x(t) = x'(t) + ut$, $y(t) \equiv y'(t)$ (заметим, что из тем самым мы можем определить траекторию шайбы относительно неподвижного наблюдателя, которая оказывается параболой – красная линия на рисунке). Из закона движения по горизонтали

находим искомое смещение: $L = ut = u \sqrt{\frac{2D}{g[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)]}} = 1,2 \text{ м}$.



ОТВЕТ: 1,2.

Задача 6 (5 баллов) [уравнение движения, сила трения, сила сопротивления воздуха, лобовое сопротивление]

Автомобиль, оснащенный антикрылом, разгоняется по прямой горизонтальной дороге. Сразу после старта его ускорение равно $a_0 = 4 \text{ м/с}^2$. В процессе разгона ускорение автомобиля растет, достигая максимального значения $a_m = 8 \text{ м/с}^2$ при скорости $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Далее ускорение автомобиля убывает. Каким будет его ускорение при скорости $v_1 = 22 \text{ м/с}$?

Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля, а создаваемая антикрылом прижимающая сила – пропорциональна скорости. Ответ записать в м/с^2 с точностью до сотых.

Подсказка 1: уравнение движения автомобиля с учетом силы сопротивления воздуха $|\vec{F}_c| = \beta v^2$ и прижимающей силы $|\vec{F}_n| = \gamma v$ имеет вид $ma = \mu(mg + \gamma v) - \beta v^2$.

Подсказка 2: из этого уравнения можно получить формулу для зависимости ускорения от

скорости и выделить в ней полный квадрат: $a(v) = \mu g + \frac{\mu^2 \gamma^2}{4m\beta} - \frac{\beta}{m} \left(v - \frac{\mu\gamma}{2\beta} \right)^2$.

Подсказка 3: в этой формуле можно неизвестные параметры выразить через a_0 , a_m и v_0 , и тогда можно найти ускорение при любой возможной скорости.

Решение:

Введем обозначения для коэффициентов пропорциональности: пусть величина силы сопротивления воздуха $|\vec{F}_c| = \beta v^2$, а величина прижимающей силы $|\vec{F}_n| = \gamma v$. С учетом прижимной силы сила нормальной реакции дороги становится равной $N = mg + \gamma v$. Поэтому уравнение движения в режиме проскальзывания колес (ясно, что для обеспечения максимальности ускорения нам снова нужен именно такой режим)

$ma = \mu(mg + \gamma v) - \beta v^2 \Rightarrow a = \mu g + \mu \frac{\gamma}{m} v - \frac{\beta}{m} v^2$. Выделяя из этого выражения полный

квадрат $a(v) = \mu g + \frac{\mu^2 \gamma^2}{4m\beta} - \frac{\beta}{m} \left(v - \frac{\mu\gamma}{2\beta} \right)^2$, замечаем, что максимальное ускорение a_m

достигается при $v_0 = \frac{\mu\gamma}{2\beta}$, и оно равно $a_m = \mu g + \frac{\mu^2 \gamma^2}{4m\beta}$. Теперь мы можем переписать

зависимость ускорения от скорости в виде: $a(v) = a_m - \frac{\beta}{m} (v - v_0)^2$. Подставим в него $v = 0$ и

найдем, что $a_0 = a_m - \frac{\beta}{m} v_0^2 \Rightarrow \frac{\beta}{m} = \frac{a_m - a_0}{v_0^2}$. Таким образом, мы полностью нашли вид этой

зависимости: $a(v) = a_m - (a_m - a_0) \left(\frac{v}{v_0} - 1 \right)^2$. При скорости $v_1 = 22 \text{ м/с}$ ускорение равно

$$a_1 = a_m - (a_m - a_0) \left(\frac{v_1}{v_0} - 1 \right)^2 = 2,24 \text{ м/с}^2.$$

ОТВЕТ: 2,24.

Задача 7 (5 баллов) [сила трения, относительное движение, равноускоренное движение]

На хорошо отполированном горизонтальном льду лежит широкий ровный лист жести, а на нем покоится маленькая шайба. Масса шайбы в 4 раза меньше массы листа. Листу и шайбе одновременно сообщают скорости $V_0 = 1 \text{ м/с}$ и $v_0 = 3 \text{ м/с}$, направленные взаимно перпендикулярно. Между шайбой и листом есть трение, а трением листа о лед можно пренебречь. Найти минимальную скорость листа относительно льда в процессе возникшего движения (считать, что в течении всего рассматриваемого времени лист находится на льду, а шайба – на листе). Ответ запишите в м/с , округлив до сотых.

Подсказка 1: сила трения, действующая между шайбой и листом, направлена против их относительной скорости и до окончания проскальзывания постоянно по величине, поэтому законы изменения скоростей шайбы и листа выглядят так: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$ и $\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{A} \cdot t$,

причем $\vec{A} = -\frac{1}{4} \vec{a}$.

Подсказка 2: для решения удобно построить «векторную диаграмму» скоростей и проследить на ней, как будут перемещаться концы векторов $\vec{v}(t)$ и $\vec{V}(t)$.

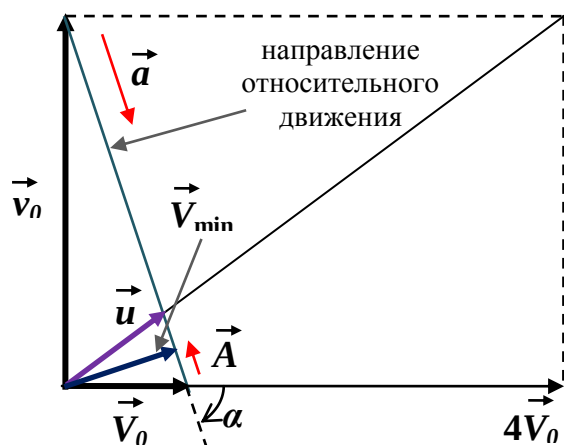
Подсказка 3: с течением времени концы векторов $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$ и $\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{A} \cdot t$ «сходятся» вдоль направления относительного движения (которое не изменяется!) к «общей» скорости шайбы и листа $\vec{u}$, с которой они будут двигаться после прекращения проскальзывания.

Решение:

Сила трения, действующая между шайбой и листом, направлена против их относительной скорости (для каждого тела). Поэтому и ускорения тел направлены так же. Пока относительное движение шайбы и листа не прекратилось, величина силы трения не меняется (она является силой трения скольжения), так что движения обоих тел являются равноускоренными. Тогда законы изменения скоростей шайбы и листа выглядят так: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$ и $\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{A} \cdot t$ (здесь $\vec{a}$ и $\vec{A}$ – ускорения тел; обратите внимание, что эти соотношения записаны в векторной форме!). Поскольку силы трения, действующие на шайбу и лист (по третьему закону Ньютона) равны по величине и противоположны по направлению, а массы различаются в 4 раза, то $\vec{A} = -\frac{1}{4}\vec{a}$. Построим векторную диаграмму

скоростей (см. рисунок). Направление относительного движения шайбы и листа указано линией, соединяющей концы векторов $\vec{V}_0$ и $\vec{v}_0$. Ускорения тел направлены вдоль этой линии, и с течением времени концы векторов $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$ и $\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{A} \cdot t$ «сходятся» вдоль этой линии к «общей» скорости шайбы и листа $\vec{u}$, с которой они будут двигаться после прекращения проскальзывания. Из рисунка ясно, что минимальная скорость листа – это длина перпендикуляра, проведенного к линии относительного движения (величина скорости листа относительно поверхности в процессе торможения относительного движения сначала убывает, а затем растет). Поэтому $V_{\min} = V_0 \cdot \sin(\alpha)$. Но из треугольника скоростей

ясно, что $\sin(\alpha) = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + V_0^2}}$. Итак, $V_{\min} = \frac{v_0 V_0}{\sqrt{v_0^2 + V_0^2}} \approx 0,95 \text{ м/с}$.



Примечание: Построенная диаграмма даже более информативна, чем нам было нужно. Например, из законов изменения скоростей видно, что $\vec{v}(t) + 4\vec{V}(t) = \vec{v}_0 + 4\vec{V}_0 + (\vec{a} + 4\vec{A}) \cdot t \equiv \vec{v}_0 + 4\vec{V}_0$. Когда относительное движение прекратится, скорости сравняются, и $\vec{v}(t) = \vec{V}(t) = \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{5}(\vec{v}_0 + 4\vec{V}_0)$. Легко заметить (вспоминая египетский треугольник), что $|\vec{v}_0 + 4\vec{V}_0| = 5 \text{ м/с}$, и поэтому $|\vec{u}| = 1 \text{ м/с}$. Это значит, что треугольник, образованный $\vec{u}$, $\vec{V}_0$ и отрезком линии относительного движения – равнобедренный, и вектор $\vec{V}_{\min}$ направлен вдоль биссектрисы угла, образованного векторами

$\vec{u}$ и $\vec{V}_0$. Поэтому угол между $\vec{V}_0$ и $\vec{V}_{\min}$ равен $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 18,4^\circ$, а угол между $\vec{V}_0$

и $\vec{u}$ в два раза больше.

ОТВЕТ: 0,95.