11 классы, подготовка к теоретическому туру

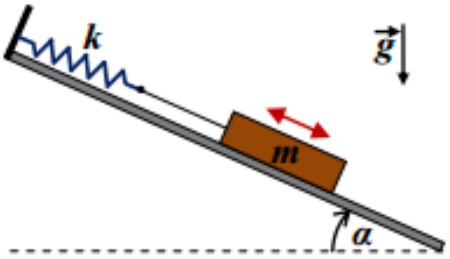
олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задачи к итоговому занятию основного курса 2022/23 учебного года.

Тема: «ПОДГОТОВКА К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ ТУРУ ФИНАЛЬНОГО ЭТАПА».

Задание 1.1.

Гладкая ровная плоскость установлена под углом α = 31° к горизонту. На ней находится брусок массы m = 2 кг, который через отрезок невесомой нерастяжимой нити прикреплен к концу легкой пружины с жесткостью k = 450 Н/м. Второй конец пружины закреплен неподвижно. Брусок совершает малые гармонические колебания, при которых его центр масс движется в вертикальной плоскости. Чему равна циклическая частота гармонических колебаний бруска в этой системе? Ответ запишите в $с^{-1}$, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.



Подсказка 1: Удобно направить ось координат x вдоль направления колебаний и отсчитывать координату от точки, в которой брусок покоится.

Подсказка 2: Тогда уравнение движения бруска $ma_x = -k(\Delta l_0 + x) + mg \cdot \sin(\alpha) = -kx$.

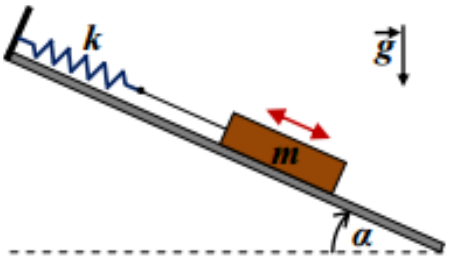
Решение:

Направим ось x вдоль линии «падения воды» и будем отсчитывать координату от положения равновесия бруска, в котором сила упругости пружины (с растяжением Δl_0) уравновешивает компоненту силы тяжести вдоль этой оси. Тогда уравнение движения бруска $ma_x = -k(\Delta l_0 + x) + mg \cdot \sin(\alpha) = -kx$ – это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 с^{-1}$.

ОТВЕТ: 10.

Задание 1.2

Гладкая ровная плоскость установлена под углом α = 31° к горизонту. На ней находится брусок массы m = 2 кг, который через отрезок невесомой нерастяжимой нити прикреплен к концу легкой пружины с жесткостью k = 450 Н/м. Второй конец пружины закреплен неподвижно. Сначала брусок покоился. Затем его отвели вниз на расстояние s (по «линии падения воды» на плоскости) и аккуратно отпустили, запустив таким образом колебания бруска, при которых центр масс бруска движется в вертикальной плоскости. При какой максимальной величине s возникшие колебания будут гармоническими? Ответ запишите в см, с точностью до десятых, без указания единиц измерения. Ускорение свободного падения равно $g \approx 10$ м/$с^2$.



Подсказка 1: Удобно направить ось координат *x* вдоль направления колебаний и отсчитывать координату от точки, в которой брусок покоится, и тогда уравнение движения бруска $ma_x = -k(\Delta l_0 + x) + mg \cdot \sin(\alpha) = -kx$.

Подсказка 2: Для того, чтобы колебания действительно были гармоническими, необходимо, чтобы нить не провисала.

Подсказка 3: Так как невесомая нить прикреплена к невесомой пружине, то сила натяжения нити равна силе упругости растянутой пружины, и поэтому при гармонических колебаниях пружина всегда должна быть растянута.

Решение:

Направим ось *x* вдоль линии «падения воды» и будем отсчитывать координату от положения равновесия бруска, в котором сила упругости пружины (с растяжением Δl_0) уравновешивает компоненту силы тяжести вдоль этой оси. Тогда уравнение движения бруска $ma_x = -k(\Delta l_0 + x) + mg \cdot \sin(\alpha) = -kx$ – это уравнение гармонических колебаний. Для того, чтобы колебания действительно были гармоническими, необходимо, чтобы нить не провисала (ведь именно она передает действие силы упругости пружины на брусок, и при провисшей нити брусок движется с постоянным ускорением $g \cdot \sin(\alpha)$). Так как невесомая нить прикреплена к невесомой пружине, то сила натяжения нити равна силе упругости растянутой пружины, и поэтому при гармонических колебаниях пружина всегда должна быть растянута: $\Delta l_0 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{mg\sin(\alpha)}{k}$. При запуске колебаний без начальной скорости амплитуда колебаний равна начальному смещению, так что центр масс бруска не выходит за «границу гармоничности», если $s \leq \dfrac{mg\sin(\alpha)}{k} \approx 4{,}2$ см.

ОТВЕТ: 4,2.

Задание 2.1

Рабочим телом тепловой машины является постоянное количество одноатомного идеального газа. Цикл рабочего тела состоит из трех процессов: изохоры (1), процесса с линейной зависимостью давления от объема $p(V) = p_0\left(1 - \dfrac{V}{V_0}\right)$ (2) и изобары (3). В каких из этих процессов теплоемкость газа не изменяется в ходе процесса? В ответе перечислите номера всех таких процессов по порядку, не разделяя знаками препинания.

Подсказка 1: Теплоемкость одноатомного идеального газа в изобарном процессе равна $C_p = \dfrac{5}{2}\nu R$, то есть является постоянной.

Подсказка 2: В процессе $p(V)=p_0\left(1-\frac{V}{V_0}\right)$ количество теплоты, которым газ обменивается с окружающими телами при малом изменении объема ΔV, равно $\Delta Q \approx p\cdot\Delta V+\frac{3}{2}\Delta(pV)\approx\frac{5}{2}p\cdot\Delta V+\frac{3}{2}V\cdot\Delta p=\frac{1}{2}p_0\cdot\Delta V\left(5-8\frac{V}{V_0}\right)$.

Решение:

Теплоемкость одноатомного идеального газа в изобарном процессе равна $C_p=\frac{5}{2}\nu R$, то есть является постоянной. Аналогично и в изобарном процессе, где $C_V=\frac{3}{2}\nu R$. В процессе $p(V)=p_0\left(1-\frac{V}{V_0}\right)$ количество теплоты, которым газ обменивается с окружающими телами при малом изменении объема ΔV, равно

$$\Delta Q \approx p\cdot\Delta V+\frac{3}{2}\Delta(pV)\approx\frac{5}{2}p\cdot\Delta V+\frac{3}{2}V\cdot\Delta p=\frac{1}{2}p_0\cdot\Delta V\left(5-8\frac{V}{V_0}\right).$$

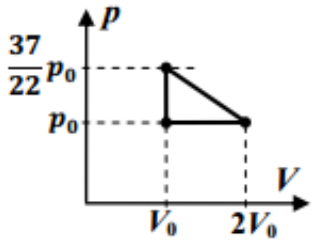
С другой стороны, температура $T=\frac{pV}{\nu R}=\frac{p_0V_0}{\nu R}\left(1-\frac{V}{V_0}\right)\frac{V}{V_0}$, то есть $\Delta T=\frac{p_0}{\nu R}\left(1-2\frac{V}{V_0}\right)\Delta V$.

Как видно, теплоемкость $C=\frac{\Delta Q}{\Delta T}=\nu\frac{R}{2}\cdot\frac{5V_0-V}{V_0-2V}$ изменяется в ходе такого процесса.

ОТВЕТ: 13.

Задание 2.2

Рабочим телом тепловой машины является постоянное количество одноатомного идеального газа. Цикл рабочего тела, показанный на рисунке в координатах давление-объем, состоит из трех процессов: изохоры, процесса с линейной зависимостью давления от объема и изобары. Определите КПД цикла. Ответ запишите в процентах, с точностью до целого значения.



Подсказка 1: В процессе изохорного нагревания газ получает тепло. При изобарном сжатии газ совершает отрицательную работу и охлаждается, и ясно, что теплота от него отводится.

Подсказка 2: Уравнение линейного процесса можно записать в виде $p(V)=\frac{26}{11}p_0\left(1-\frac{15V}{52V_0}\right)$.

Подсказка 3: Количество теплоты, которым газ обменивается с окружающими телами при малом изменении объема ΔV в этом процессе $\Delta Q \approx p\cdot\Delta V+\frac{3}{2}\Delta(pV)\approx\frac{5}{2}p\cdot\Delta V+\frac{3}{2}V\cdot\Delta p=\frac{5}{11}p_0\cdot\Delta V\left(13-6\frac{V}{V_0}\right)$.

Решение:

В первую очередь необходимо разобраться, на каком из участков цикла рабочее тело получает тепло, а на каком – отдает. В процессе изохорного нагревания газ получает тепло.

При изобарном сжатии газ совершает отрицательную работу и охлаждается, и ясно, что теплота от него отводится. Самое сложное – анализ линейного процесса. Если записать уравнение прямой в виде $p(V)=\frac{26}{11}p_0\left(1-\frac{15V}{52V_0}\right)$, и с его помощью вычислить количество теплоты, которым газ обменивается с окружающими телами при малом изменении объема ΔV, то получим:

$$\Delta Q \approx p\cdot\Delta V+\frac{3}{2}\Delta(pV)\approx\frac{5}{2}p\cdot\Delta V+\frac{3}{2}V\cdot\Delta p=\frac{5}{11}p_0\cdot\Delta V\left(13-6\frac{V}{V_0}\right),$$

то есть при $V\in[V_0,2V_0]$ и $\Delta V>0$ всегда $\Delta Q>0$, то есть в этом процессе тепло только подводится. Теперь ясно, что для данного цикла проще всего почитать работу, равную площади цикла $A=\frac{1}{2}\frac{15}{22}p_0V_0=\frac{15}{44}p_0V_0$, и количество теплоты холодильника, отводимое от рабочего тела в изобарном процессе:

$$Q_X=-A_p-\Delta U_p=p_0V_0+\frac{3}{2}\left(2p_0V_0-p_0V_0\right)=\frac{5}{2}p_0V_0.$$

Значит, КПД цикла $\eta=\frac{A}{Q_X+A}=\frac{3}{25}=12\ \%$.

ОТВЕТ: 12.

Задание 3.1

Ион влетел в постоянное магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл, двигаясь перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью v = 1,2 км/с. Далее он движется по окружности радиуса R = 1 мм. Определите удельный заряд иона и запишите его в виде $x \cdot 10^6$ Кл/кг. В ответе укажите x, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Поскольку сила Лоренца не совершает работу, то модуль скорости иона постоянен – он совершает равномерное (ларморовское) вращение.

Подсказка 2: Радиус ларморовской окружности, по которой в магнитном поле движется ион, определяется из уравнения для центростремительной компоненты его ускорения.

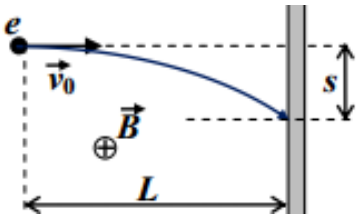
Решение:

Радиус ларморовской окружности, по которой в магнитном поле движется ион, определяется из уравнения для центростремительной компоненты его ускорения: поскольку сила Лоренца не совершает работу, то модуль скорости иона постоянен, и $m\frac{v_0^2}{R}=qv_0B\Rightarrow\frac{q}{m}=\frac{v_0}{BR}=6\cdot10^6$ Кл/кг.

ОТВЕТ: 6,0.

Задание 3.2

Электронная пушка выстреливает электроны в направлении фотопластинки (перпендикулярно ее поверхности) каждый раз с одной и той же начальной скоростью. Точка выстрела находится на расстоянии $L=80$ мм от поверхности фотопластинки, и между ними, в вакууме, создано однородное магнитное поле. Электроны попадают на фотопластинку в точке на расстоянии $s=20$ мм от «точки прицеливания» (см. рисунок). Каким станет отклонение электронов от «точки прицеливания», если величину индукции магнитного поля увеличить в 1,7 раза? Ответ запишите в мм, с точностью до целого значения.



Подсказка 1: Пусть φ – угловой размер дуги окружности, пройденной электроном. Тогда $\sin(\varphi)=\frac{L}{R}$ и $\cos(\varphi)=\frac{R-s}{R}$.

Подсказка 2: Возводя эти равенства в квадрат и складывая, находим R.

Подсказка 3: Поскольку $m\frac{v_0^2}{R}=ev_0B\Rightarrow R=\frac{mv_0}{qB}$, то при $B'=1{,}7\cdot B$ новый радиус $R'=\frac{R}{1{,}7}$.

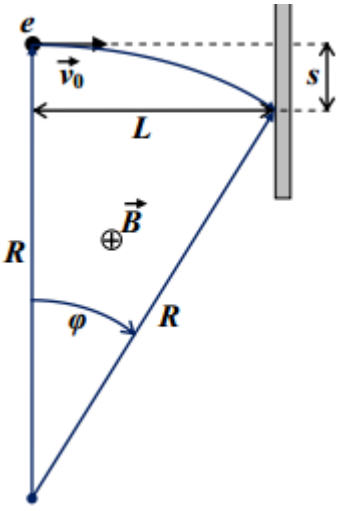
Решение:

Пусть φ – угловой размер дуги окружности, пройденной электроном. Тогда $\sin(\varphi)=\frac{L}{R}$ и $\cos(\varphi)=\frac{R-s}{R}$. Возводя эти равенства в квадрат и складывая, находим, что

$$\frac{L^2+(R-s)^2}{R^2}=1\Rightarrow R=\frac{L^2+s^2}{2s}=170\text{мм}.$$

Аналогично предыдущему заданию запишем уравнение для центростремительной компоненты ускорения электрона: $m\frac{v_0^2}{R}=ev_0B\Rightarrow R=\frac{mv_0}{qB}$. Значит, при $B'=1{,}7\cdot B$ новый радиус $R'=\frac{R}{1{,}7}=100\text{мм}$. Тогда

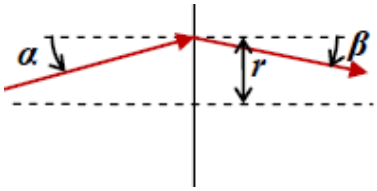
$$s'=R'-\sqrt{R'^2-L^2}=40\text{мм}.$$



ОТВЕТ: 40.

Задание 4.1

Луч света падает на тонкую линзу в точке на расстоянии *r* = 2 см от ее главной оптической оси под углом 6° к этой оси, «уходя» от нее. После преломления в линзе луч выходит под углом 4° к этой оси, приближаясь к ней (см. рисунок). Найдите оптическую силу линзы. Ответ приведите в диоптриях, с точностью до целого значения.



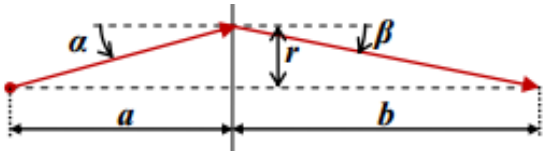
Подсказка 1: Продолжим падающий луч до пересечения с главной оптической осью линзы и представим себе, что этот луч был испущен точечным источником, помещенным в точку пересечения. Тогда его изображение находилось бы в точке пересечения преломленного луча с главной оптической осью линзы.

Подсказка 2: Далее удобно использовать формулу тонкой линзы: $D=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Решение:

Продолжим падающий луч до пересечения с главной оптической осью линзы и представим себе, что этот луч был испущен точечным источником, помещенным в точку пересечения. Тогда его изображение находилось бы в точке пересечения преломленного луча с главной оптической осью линзы. Запишем формулу тонкой линзы: $D=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, и умножим ее на r.

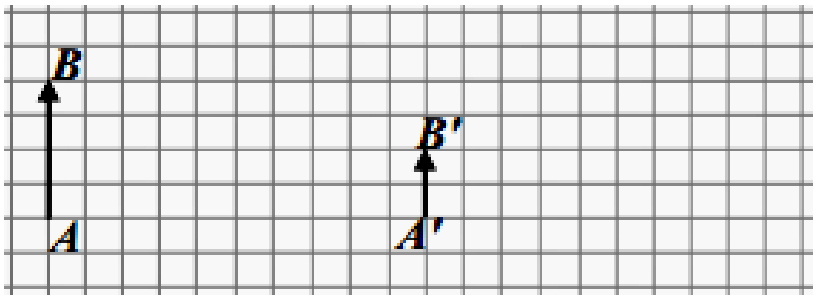
Получим: $r\cdot D=\frac{r}{a}+\frac{r}{b}=\mathrm{tg}(\alpha)+\mathrm{tg}(\beta)\Rightarrow D=\frac{\mathrm{tg}(\alpha)+\mathrm{tg}(\beta)}{r}\approx 8{,}75\approx 9$ Дптр. Поскольку углы малые, при расчетах с заданной точностью можно использовать приближенную формулу $D\approx\frac{\alpha+\beta}{r}\approx 8{,}72\approx 9$ Дптр.



ОТВЕТ: 9.

Задание 4.2

Некий школьник выполнил на тетрадном листе в клетку построение хода лучей от источника AB к его изображению $A'B'$, полученному с помощью тонкой линзы. Линзу и лучи он рисовал карандашом, и его младший брат стер их так, что на листе от них не осталось и следа (см. рисунок). Восстановите утраченную информацию и найдите модуль оптической силы линзы. Ответ приведите в диоптриях, с точностью до целого значения. Длина стороны тетрадной клетки 5 мм, рисунок выполнен в масштабе 1:1.



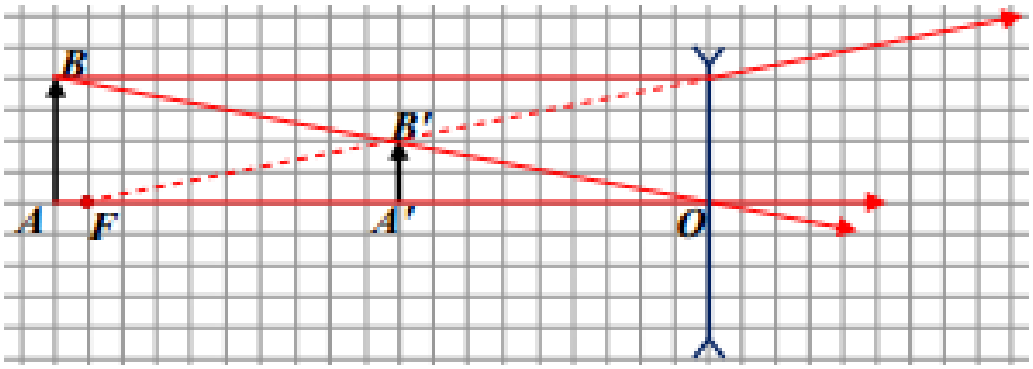
Подсказка 1: Лучи, пересекающие линзу в оптическом центре, не преломляются. Поэтому прямая, соединяющая точку и ее изображение, проходит через оптический центр.

Подсказка 2: Оптический центр линзы O – это пересечение прямых AA' и BB'.

Подсказка 3: Луч, падающий на линзу из точки B параллельно этой оси, после преломления в линзе идет из точки B', и его продолжение пересекает главную оптическую ось линзы в ее фокусе F.

Решение:

Лучи, пересекающие линзу в оптическом центре, не преломляются. Поэтому прямая, соединяющая точку и ее изображение, проходит через оптический центр. Следовательно, оптический центр линзы O – это пересечение прямых AA' и BB'. Так как предмет и его изображение параллельны, то они параллельны плоскости линзы, и нам становится ясно, что главная оптическая ось линзы – это прямая AA'. Луч, падающий на линзу из точки B параллельно этой оси, после преломления в линзе идет из точки B', и его продолжение пересекает главную оптическую ось линзы в ее фокусе F. По поведению данного луча понимаем, что это рассеивающая линза. Проведя построение, обнаруживаем, что фокусное расстояние равно F = 20 мм. Таким образом, оптическая сила линзы $D = \frac{1}{F} = \frac{100}{9}$ Дптр ≈ 11 Дптр.



ОТВЕТ: 11.