

10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задание для самостоятельного решения к занятию 8 (17.02.2018).

Тема: «ОПТИКА».

Задача 1 (3 балла) [закон отражения света, плоское зеркало]

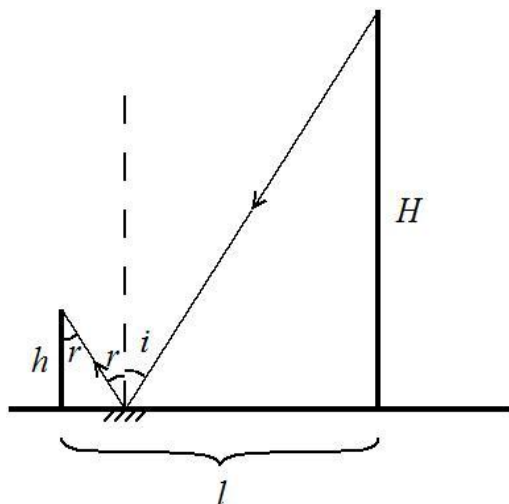
Человек, рост которого $h = 1,75$ м, находится на расстоянии $l = 6$ м от столба высотой $H = 7$ м. На каком расстоянии от себя человек должен положить на Землю горизонтальное маленькое плоское зеркало, чтобы в нем видеть изображение верхушки столба? Ответ выразить в дм.

Подсказка 1: луч, падающий из вершины столба на зеркало, и луч, отраженный от зеркала и попадающий в глаз человека, лежат в одной плоскости, а угол падения и отражения равны.

Подсказка 2: если x – расстояние от человека до зеркала, то тангенс угла падения $tg(i) = \frac{l-x}{H}$.

Подсказка 3: тангенс угла отражения $tg(r) = \frac{x}{h}$.

Решение:



В соответствии с законом отражения света луч 1, падающий из вершины столба на зеркало, и луч 2, отраженный от зеркала и попадающий в глаз человека, лежат в одной плоскости, а угол падения i и отражения r равны: $i = r$. Если x – расстояние от человека до зеркала, то

$$tg(i) = \frac{l-x}{H} = tg(r) = \frac{x}{h} \Rightarrow x = \frac{hl}{H+h} = 1,2 \text{ м.}$$

ОТВЕТ: 12.

Задача 2 (4 балла) [закон преломления света, показатель преломления]

Луч света падает на поверхность прозрачного стеклянного шара под углом $\alpha = 45^\circ$ к радиусу, проведенному в точку падения. Показатель преломления стекла, из которого изготовлен шар, $n = 1,414 \approx \sqrt{2}$. На какой угол отклонится луч от направления первоначального движения после выхода из шара? Ответ выразить в градусах.

Подсказка 1: следует рассмотреть ход луча в плоскости, проходящей через центр шара и точку падения.

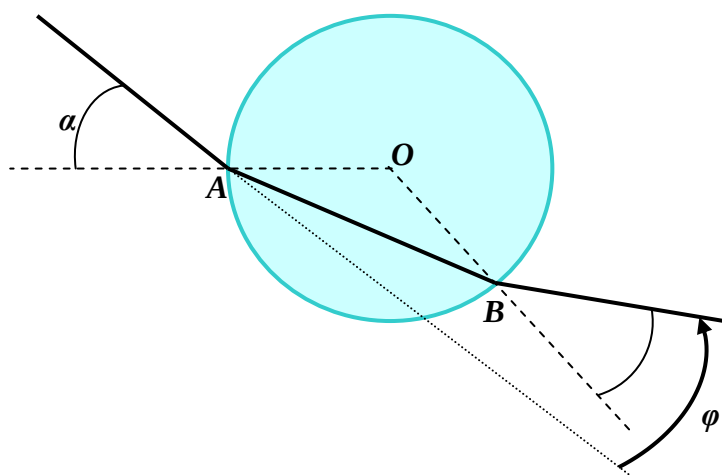
Подсказка 2: угол преломления луча может быть определен на основании закона преломления: $\beta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)$.

Подсказка 3: так как точка падения луча на поверхность шара и точка выхода лежат на одинаковом расстоянии от центра шара, то угол падения луча на поверхность «изнутри» при выходе равен β , и после выхода из шара луч снова будет направлен под углом α к радиусу.

Решение:

Построим ход луча в плоскости, проходящей через центр шара. Пусть A – точка, в которой луч падает на поверхность шара, а B – точка, в которой он выходит из этой поверхности. Угол преломления $\angle OAB \equiv \beta$ может быть определен на основании закона преломления:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right).$$



Так как треугольник OAB – равнобедренный, то угол падения луча в точке B также равен β . Следовательно, после выхода из шара луч снова будет направлен под углом α к радиусу. Из геометрии построения легко заметить, что угол отклонения луча от первоначального направления $\varphi = 2(\alpha - \beta)$. Следовательно,

$$\varphi = 2 \cdot \left[\alpha - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right) \right] \approx 2 \cdot \left[45^\circ - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\right) \right] = 30^\circ.$$

ОТВЕТ: 30.

Задача 3 (4 балла) [тонкая линза, увеличение линзы, формула линзы]

Если нить лампочки разместить на главной оптической оси собирающей тонкой линзы перпендикулярно этой оси, то линза дает действительное изображение нити с увеличением $k = -0,5$ (отрицательность увеличения означает, что изображение перевернутое). Каким будет увеличение изображения нити, если ее разместить вдоль главной оптической оси той же линзы в той же точке? Считать, что нить тонкая и практически прямолинейная, а ее длина много меньше фокусного расстояния линзы. Ответ записать в виде десятичной дроби.

Подсказка 1: собирающая линза дает действительное изображение, если расстояние от объекта до линзы $a > F$, и в этом случае увеличение при поперечном расположении нити:

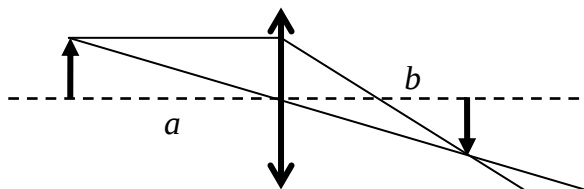
$$k = -\frac{l'}{l} = -\frac{b}{a} \text{ (знак «минус» показывает, что изображение перевернуто).}$$

Подсказка 2: из формулы линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ можно найти, что $k = -\frac{F}{a - F}$.

Подсказка 3: при продольном расположении длина изображения находится непосредственно из формулы линзы как разность расстояний от линзы до изображений начала и конца нити

$$l' = \tilde{b} - b = \frac{F^2}{(a - l - F)(a - F)} l.$$

Решение:



Собирающая линза дает действительное изображение, если расстояние от объекта до линзы $a > F$. Из построения для такого случая видно, что увеличение при поперечном расположении нити: $k = -\frac{l'}{l} = -\frac{b}{a}$. С учетом формулы линзы находим, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a - F} \Rightarrow k = -\frac{F}{a - F}.$$

При продольном расположении можно получить выражение для увеличения маленького предмета непосредственно из формулы линзы:

$$\tilde{a} = a - l \Rightarrow l' = \tilde{b} - b = \frac{(a - l)F}{a - l - F} - \frac{aF}{a - F} = \frac{F^2}{(a - l - F)(a - F)} l \approx \left(\frac{F}{a - F} \right)^2 l$$

Следовательно,

$$k_{np} = \left(\frac{F}{a - F} \right)^2 = k^2 = 0,25.$$

Следует отметить, что этот ответ корректен только в том случае, если $l \ll a - F$, так как при приближении края нити к передней фокальной плоскости линзы увеличение начинает сильно зависеть от размеров нити. Более того, если нить пересекает эту плоскость ($l > a - F$), то четкого изображения нити вообще нет. В нашем случае по заданному поперечному увеличению можно установить, что $a = 3F$, и необходимое условие выполнено.

ОТВЕТ: 0,25.

Задача 4 (4 балла) [тонкая линза, увеличение линзы, формула линзы]

Однажды М.В.Ломоносов, закончив работу, стал разглядывать тени, возникавшие на стене. На столе, рядом со свечой, лежала принесенная помощником линза. Михайло Васильевич Взял линзу, и, поместив ее между свечой и стеной, получил на стене перевернутое увеличенное ровно в $n = 2$ раза изображение пламени свечи. «Что ж, теперь ясно, какова оптическая сила этой линзы,» - подумал Ломоносов. Определите ее и Вы (выразив в диоптриях), учтя, что в современных единицах расстояние от свечи до стены было $L = 1,8$ м.

Подсказка 1: поскольку Ломоносов наблюдал действительное увеличенное перевернутое изображение, то линза является собирающей.

Подсказка 2: так как модуль увеличения равен n , то $b = na$, и при этом из условия следует, что $a + b = L$.

Подсказка 3: из предыдущих уравнений можно найти a и b , а затем воспользоваться формулой линзы.

Решение:

Пусть a, b - расстояния от свечи до линзы и от линзы до стены соответственно. Поскольку Ломоносов наблюдал действительное увеличенное перевернутое изображение, то линза

является собирающей, поэтому $\begin{cases} b = na \\ a + b = L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = L/(n+1) \\ b = nL/(n+1) \end{cases}$. Воспользовавшись формулой линзы, найдем: $D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(n+1)^2}{nL} = 2,5 \text{ Дптр}$.

ОТВЕТ: 2,5.

Задача 5 (4 балла) [тонкая линза, увеличение линзы, формула линзы]

Перед собирающей линзой с фокусным расстоянием $F = 40 \text{ см}$ расположен квадрат со стороной $a = 20 \text{ см}$. Одна из сторон квадрата находится на главной оптической оси линзы, две — параллельны плоскости линзы. Удаление ближней стороны квадрата от плоскости линзы $L = 60 \text{ см}$. Определите площадь изображения квадрата, даваемого линзой. Ответ дать в см^2 .

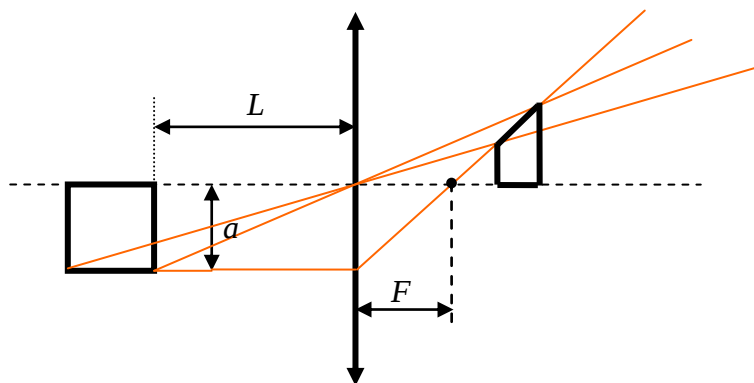
Подсказка 1: проведя построение, следует убедиться, что изображение квадрата является трапецией (изображением отрезков, перпендикулярных оси линзы, являются отрезки, также перпендикулярные этой оси, изображением стороны, параллельной оси является отрезок, продолжение которого проходит через фокус).

Подсказка 2: с помощью формулы линзы можно найти расстояние от линзы до оснований

трапеции и ее высоту как разность этих расстояний: $h = \frac{F^2 a}{(L - F)(L + a - F)}$.

Подсказка 3: длины оснований можно найти из подобия треугольников на чертеже или из формулы для поперечного увеличения.

Решение:



Как видно из построения, изображение квадрата является трапецией. Воспользовавшись формулой линзы, находим положение оснований этой трапеции на главной оптической оси:

$$\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i} = \frac{1}{F} \quad (i = A, C) \Rightarrow \begin{cases} b_A = \frac{FL}{L-F} \\ b_C = \frac{F(L+a)}{L+a-F} \end{cases}$$

Таким образом, высота трапеции

$$h = b_A - b_C = F \cdot \left(\frac{L}{L-F} - \frac{L+a}{L+a-F} \right) = \frac{F^2 a}{(L-F)(L+a-F)}.$$

Длины оснований трапеции найдем, исходя из подобия соответствующих треугольников:

$$\begin{cases} |A'B'| = \frac{b_A}{L} a = \frac{Fa}{L-F} \\ |C'D'| = \frac{b_C}{L+a} a = \frac{Fa}{L+a-F} \end{cases}.$$

Поэтому площадь трапеции

$$S = \frac{|A'B'| + |C'D'|}{2} h = \frac{F^3 a^2 (2L - 2F + a)}{2(L - F)^2 (L + a - F)^2} = 1200 \text{ см}^2.$$

ОТВЕТ: 1200.

Задача 6 (4 балла) [закон отражения света, плоское зеркало, закон преломления света, полное внутреннее отражение]

В плоской ванне с жидкостью на глубине $h_0 = 3 \text{ см}$ помещен точечный источник света.

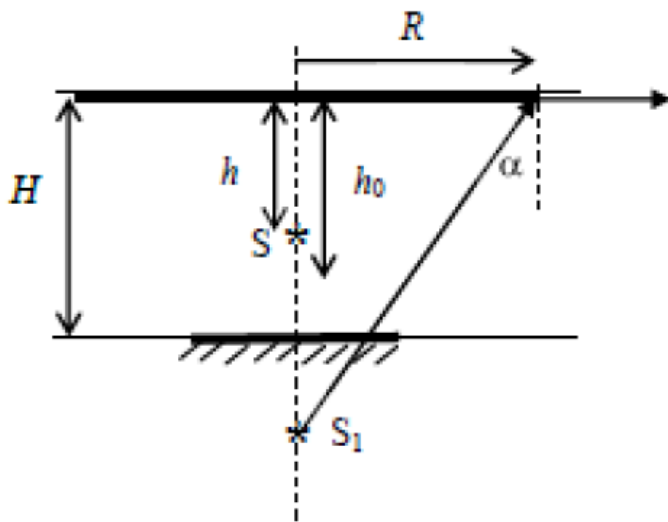
Источник начинает смещаться по вертикали вверх со скоростью $V = 10^{-3} \text{ м/с}$. На дне ванны находится плоское зеркало, а на поверхности, на высоте $H = 4 \text{ см}$ от дна плавает непрозрачный диск радиусом $R = 6 \text{ см}$. Центр диска расположен на одной вертикали с источником света. Через какое время (в секундах) источник света станет виден для внешнего наблюдателя? Показатель преломления жидкости $n = \sqrt{2}$.

Подсказка 1: чтобы источник стал виден, угол падения лучей от него на поверхность раздела «вода-воздух» α должен быть равен или меньше угла полного внутреннего отражения.

Подсказка 2: для «пограничного» положения источника и «крайнего» (т.е. идущего вблизи края диска) луча $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{(2H - h)^2 + R^2}} = \frac{1}{n}$.

Подсказка 3: из предыдущего соотношения можно найти глубину положения источника, на которой он станет виден $h = 2H - R\sqrt{n^2 - 1}$.

Решение:



Пусть S , S_1 – источник света и его отражение в зеркале. Чтобы источник стал виден, угол α должен быть равен или меньше угла полного внутреннего отражения. В «пограничном» положении $\sin \alpha = \frac{1}{n}$. С учетом геометрических соотношений:

$$\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{(2H - h)^2 + R^2}} = \frac{1}{n}$$

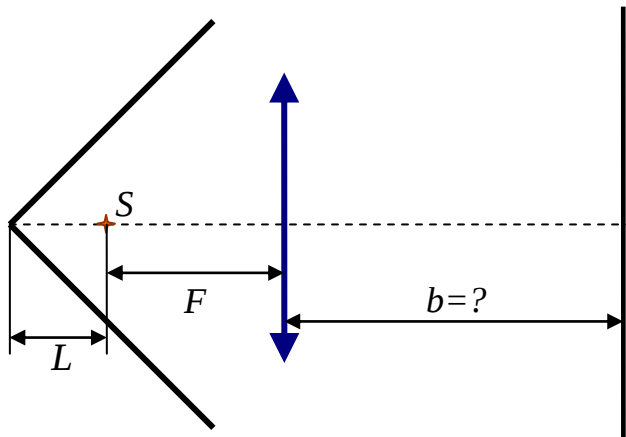
Из этого уравнения определяем h : $h = 2H - R\sqrt{n^2 - 1}$, то есть $h = 2 \text{ см}$. Как видно, источник должен двигаться именно вверх (иначе он не станет виден, даже опустившись на дно), причем

$$t = \frac{h_0 - h}{V} = \frac{h_0 + R\sqrt{n^2 - 1} - 2H}{V} = 10 \text{ с}.$$

ОТВЕТ: 10.

Задача 7 (5 баллов) [закон отражения света, плоское зеркало, тонкая линза]

Две зеркальные плоскости образуют прямой двугранный угол. На биссектрисе этого угла, на расстоянии $L = 20$ см от его ребра расположен точечный источник света, а за ним – тонкая линза с оптической силой $D = 2,5$ Дптр. Плоскость линзы параллельна ребру двугранного угла (см. рисунок). Расстояние от источника до линзы в точности равно ее фокусному расстоянию. На каком расстоянии от линзы необходимо поместить плоский экран, параллельный ребру двугранного угла, чтобы наблюдать на нем два четких изображения источника? Ответ запишите в дециметрах.

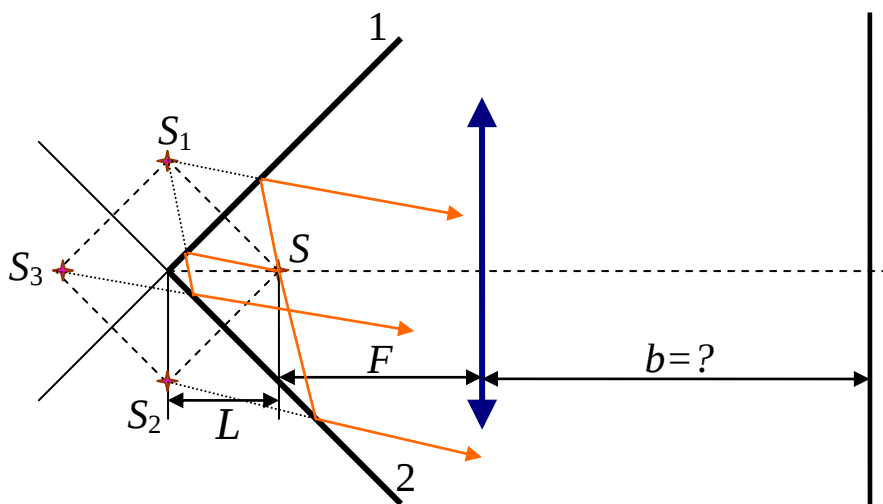


Подсказка 1: каждое из зеркал формирует изображение источника, и есть также изображение этих изображений в другом зеркале (что соответствует ходу лучей, испытавших два отражения от поверхностей зеркал).

Подсказка 2: в данном случае двугранное зеркало создает три изображения источника, которые вместе с ним самим располагаются в вершинах правильного четырехугольника (квадрата).

Подсказка 3: для наблюдения двух изображений необходимо использовать в качестве источников для линзы изображения источника в двух зеркалах, находящиеся на одинаковом расстоянии от линзы.

Решение:



Как видно (см. рисунок), изображением источника в зеркале 1 будет S_1 (лучи испытывают однократное отражение от зеркала 1), а изображением в зеркале 2 – S_2 (лучи испытывают однократное отражение от зеркала 2). Кроме того, есть также лучи, испытывающие два отражения, и они кажутся вышедшими из точки S_3 , которая одновременно является изображением S_1 в зеркале 2 и изображением S_2 в зеркале 1. В результате приходим к выводу, что в данном случае двугранное зеркало создает три изображения источника,

которые вместе с ним самим располагаются в вершинах правильного четырехугольника (квадрата).

Далее лучи проходят через линзу и попадают на экран. Источниками лучей для линзы являются S , S_1 , S_2 и S_3 . На экране будут наблюдаться их четкие изображения, если

расстояния от точки до линзы и от линзы до экрана связаны соотношением $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = D$. Для

наблюдения двух изображений необходимо использовать в качестве источников две светящиеся точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от линзы. Такая пара всего одна – это S_1 и S_2 . Для них $a = L + F$, и поэтому

$$\frac{1}{L+F} + \frac{1}{b} = D \Rightarrow b = \frac{1}{D} \left(1 + \frac{1}{DL} \right) = 1,2 \text{ м} = 12 \text{ дм}.$$

ОТВЕТ: 12.

Задача 8 (3 балла) [Сверхновая, энергия излучения]

В 1987 году произошло очень важное событие для астрономов – в Большом Магеллановом Облаке вспыхнула Сверхновая (SN1987A – см. фото слева). В максимуме блеска интенсивность светового излучения SN1987A, достигшего Земли, равнялась $I_{\max} \approx 0,1$ мкВт/м². Расстояние от Земли до вспыхнувшей звезды составляет $r \approx 168000$ световых лет (световой год – расстояние, которое проходит свет за 1 год). Самой мощной из гидроэлектростанций России является Саяно-Шушенская ГЭС (фото справа). Ее мощность равна $P_{\text{СШ}} \approx 6,6$ ГВт. Во сколько раз «пиковая» мощность светового излучения SN1987A превосходила мощность Саяно-Шушенской ГЭС? Учтите, что в году 365 дней. Скорость света считайте равной $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Записать отношение мощностей в виде 10^x . В ответе укажите x , округлив до ближайшего целого значения.



Подсказка 1: $1 \text{ св.год} \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ м} \approx 10^{16} \text{ м}$:

Подсказка 2: мощность излучения равна интенсивности, умноженной на площадь сферы с радиусом, равным расстоянию до источника излучения.

Подсказка 3: $5 \cdot 10^{26} \approx 10^{26,7}$.

Решение:

Сначала выразим расстояние до SN1987A от Земли в метрах: $1 \text{ св.год} \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ м} \approx 10^{16} \text{ м}$. Значит, $r \approx 1,7 \cdot 10^{21} \text{ м}$. Можно считать, что световое излучение Сверхновой равномерно распределяется по всем направлениям. Тогда мощность излучения равна интенсивности, умноженной на площадь сферы с радиусом, равным расстоянию до источника излучения. Значит, пиковая мощность излучения сверхновой:

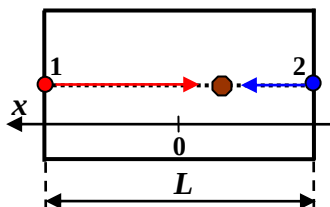
$P_{\text{СН}} \approx I_{\max} \cdot 4\pi r^2 \approx 3,6 \cdot 10^{36} \text{ Вт}$. Следовательно, $\frac{P_{\text{СН}}}{P_{\text{СШ}}} \approx 5 \cdot 10^{26}$! Если записывать этот ответ в

предложенной форме, то $\frac{P_{\text{СН}}}{P_{\text{СШ}}} \approx 10^{26,7}$. Поэтому в ответе следует указать 27 (достаточно заметить, что $5 > \sqrt{10} = 10^{0,5}$). Отметим, что в световое излучение идет лишь малая часть энергии, высвобождающейся при взрыве. Полная энергия взрыва СН1987А оценивается в 10^{46} Дж!

ОТВЕТ: 27.

Задача 9 (5 баллов) [Энергия излучения]

Робот, оснащенный двумя фотодатчиками, перемещается по прямой вдоль площадки длиной $L = 12$ м. На границах его области движения установлены две маленькие лампочки, каждая из которых испускает свет (одна – красного цвета, другая – синего) равномерно по всем направлениям внутрь площадки. Ток каждого фотодатчика пропорционален мощности излучения, попадающего в окошко фотодатчик. Логическая схема робота получает информацию о величине суммарного тока датчиков (величина $I = I_1 + I_2$) и о том, какой из сигналов – от красного или синего датчика – мощнее (величина $\beta = \pm 1$). Получите формулу для определения координаты робота и вычислите x по значениям $I = 6$ мА и $\beta = -1$. Координата отсчитывается от середины области движения (см. рисунок), при $x = 0$ ток $I_0 = 1$ мА. Ответ укажите в сантиметрах, округлив до ближайшего целого значения.



Подсказка 1: расстояние от робота до ламп в момент, когда он находится в точке с координатой x , равны $r_1 = \frac{L}{2} - x$ и $r_2 = \frac{L}{2} + x$.

Подсказка 2: ток каждого датчика пропорционален мощности сигнала, а мощность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: $I_{1,2} = \frac{\alpha}{r_{1,2}^2}$ (α – некоторая постоянная величина).

Подсказка 3: знак координаты соответствует знаку β .

Решение:

Расстояние от робота до ламп в момент, когда он находится в точке с координатой x , равны $r_1 = \frac{L}{2} - x$ и $r_2 = \frac{L}{2} + x$. По условию ток каждого датчика пропорционален мощности

сигнала, а мощность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: $I_{1,2} = \frac{\alpha}{r_{1,2}^2}$

(α – некоторая постоянная величина). Поэтому суммарный ток

$$I = \alpha \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) = \alpha \left(\frac{4}{(L - 2x)^2} + \frac{4}{(L + 2x)^2} \right) = \alpha \frac{8(L^2 + 4x^2)}{(L^2 - 4x^2)^2}.$$

При $x = 0$ получаем $I_0 = \alpha \frac{8}{L^2}$. Таким образом, $\frac{I}{I_0} = \frac{L^2(L^2 + 4x^2)}{(L^2 - 4x^2)^2}$. Из этого уравнения можно найти x^2 : $x^2 = \frac{L^2}{8} \left(2 + \frac{I_0}{I} - \sqrt{8 \frac{I_0}{I} + \frac{I_0^2}{I^2}} \right)$. Знак координаты, как нетрудно догадаться, соответствует знаку β . Подставляя значения токов, находим: $|x| = \frac{L}{2\sqrt{2}}$, и, с учетом знака $x = -\frac{L}{2\sqrt{2}} \approx -4,24 \text{ м}$.

ОТВЕТ: – 424.

Задача 10 (4 балла) [Энергия излучения]

Робот, находившийся на расстоянии 10 м от небольшой лампочки, поехал прямо на нее. Лампочка светит равномерно во все стороны. Робот снабжен фотодатчиком, сигнал которого (ток) пропорционален мощности светового излучения, поступающего во «входное окно» датчика. Окно датчика всегда развернуто в сторону лампочки. По данным с запоминающего устройства робота ток датчика в течении первых 2,5 секунд движения изменялся следующим образом:

$t, \text{ с}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$I, \text{ А}$	0,200	0,234	0,277	0,333	0,408	0,512

Определите скорость, с которой двигался робот. Ответ приведите в м/с с точностью до десятых.

Подсказка 1: ток каждого датчика пропорционален мощности сигнала, а мощность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.

Подсказка 2: если робот двигался равномерно со скоростью v , то $r = r_0 - vt$, и

$$I = I_0 \frac{r_0^2}{(r_0 - vt)^2}.$$

Подсказка 3: удобно выразить скорость через данные в таблице.

Решение:

По условию ток каждого датчика пропорционален мощности сигнала, а мощность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: $I = I_0 \frac{r_0^2}{r^2}$. Здесь $r_0 = 10 \text{ м}$, а $I_0 = 0,2 \text{ А}$.

Предположим, что робот двигался равномерно со скоростью v . Тогда $r = r_0 - vt$, и

$$I = I_0 \frac{r_0^2}{(r_0 - vt)^2}.$$

Удобно выразить искомую величину (скорость) через данные в таблице.

Можно выразить: $\sqrt{\frac{I_0}{I}} = 1 - \frac{v_0}{r_0} t$, и тогда $\frac{v_0}{r_0} = \frac{1}{t} \left(1 - \sqrt{\frac{I_0}{I}} \right)$. В момент времени $t = 0$ это

равенство очевидно выполняется. Вычислим эту величину для остальных моментов (подставляя данные из таблицы в условии в полученную формулу):

$t, \text{ с}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$v/r_0, \text{ с}^{-1}$	0,1510	0,1502	0,1500	0,1499	0,1500

Как видно, предположение о равномерности движения оправдывается очень хорошо, и с высокой точностью (вычисляем среднее из полученных значений и округляем до третьего

знака, ибо такова точность наших данных) $\frac{v}{r_0} \approx 0,150 \text{ с}^{-1}$. Из этого значения определяем скорость: $v \approx 1,50 \text{ м/с}$.

ОТВЕТ: 1,5.