10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 2.

Тема: «ДВИЖЕНИЕ: СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ И ЗАКОНЫ».

Задача 1 (3 балла) [ускорение, равноускоренное движение, путь]

Тело, брошенное вертикально вверх, прошло за время $t = 10$ с путь $S = 250$ м. Найдите ее путь за последнюю секунду этого движения. Ответ запишите в метрах. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g \approx 10$ м/с^2.

Подсказка 1: Тело сначала поднимается вверх, потом опускается вниз.

Подсказка 2: Путь за 10 с связан с величиной начальной скорости соотношением $S = \frac{v_0^2}{g} - v_0 t + \frac{gt^2}{2}$.

Подсказка 3: В начале последней (десятой) секунды тело двигалось вниз со скоростью $v_9 = g(t-\tau) - v_0$ (здесь $\tau = 1$с).

Решение:

Ясно, что тело обязательно должно изменять направление движения в течении 10 с (тело не меняет направление движения, если его скорость больше 100 м/с, и при этом оно пройдет путь не меньше 500 м). Скорость падает до нуля за время $t_0 = \frac{v_0}{g}$. Значит, путь состоит из отрезка пути вверх, равного $S' = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$ и отрезка пути вниз $S'' = \frac{g(t - v_0/g)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} - v_0 t + \frac{gt^2}{2}$. Значит, $S = \frac{v_0^2}{g} - v_0 t + \frac{gt^2}{2}$. Из этого соотношения получаем <u>квадратное</u> уравнение для скорости, которое дает <u>два</u> возможных решения $v_0^2 - g v_0 t + \frac{g^2 t^2}{2} - gS = 0 \Rightarrow (v_0)_{1,2} = \frac{gt}{2} \pm \sqrt{gS - \frac{g^2 t^2}{4}}$. Однако в данном случае дискриминант уравнения равен нулю, и мы получаем единственное решение $v_0 = \frac{gt}{2} \approx 50$ м/с. Значит, к началу десятой секунды (введем обозначение для ее длительности $\tau = 1$с) тело будет двигаться вниз со скоростью $v_9 = g(t-\tau) - v_0 = \frac{g(t-2\tau)}{2} = 40$ м/с, а путь за последнюю (десятую) секунду $s_{10} = v_9 \tau + \frac{g\tau^2}{2} = \frac{g\tau(t-\tau)}{2} = 45$ м.

ОТВЕТ: 45.

Задача 2 (4 балла) [равноускоренное движение, равномерное движение]

Два мальчика, стоявших рядом на ровном горизонтальном поле, одновременно бросили камни в разные стороны с одинаковой скоростью. Камень первого упал на землю спустя время $T_1 = 2$с после броска, а камень второго – спустя $T_2 = 3$с. Оказались, что оба камня улетели от точки броска на одно и то же расстояние. Найти это расстояние. Ускорение свободного падения принять равным $g \approx 10$ м/с^2. Ответ выразить в метрах.

Подсказка 1: Поскольку $T_{1,2} = \frac{2v_0 \sin(\alpha_{1,2})}{g}$ и $T_1 \neq T_2$, то камни были брошены под разными углами.

Подсказка 2: Дальность полета одинакова: $L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_1)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_2)}{g}$, откуда $2\alpha_2 = 180° - 2\alpha_1$.

Подсказка 3: Искомое расстояние можно записать в виде $L = \frac{2v_0 \sin(\alpha_1)}{g} \cdot \frac{2v_0 \cos(\alpha_1)}{g} \cdot \frac{g}{2}$.

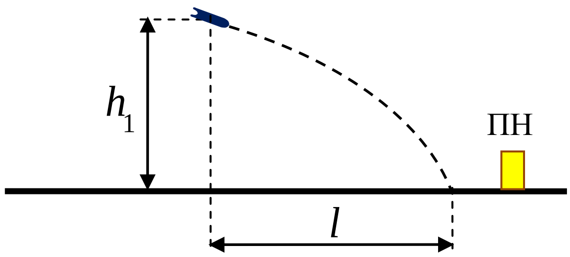
Решение:

Поскольку $T_1 \neq T_2$, то камни были брошены под разными углами. При этом $T_{1,2} = \frac{2v_0 \sin(\alpha_{1,2})}{g}$ (v_0 – начальная скорость камней). С другой стороны, дальность полета одинакова: $L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_1)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_2)}{g}$, откуда $2\alpha_2 = 180° - 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 90° - \alpha_1$. Поэтому $T_2 = \frac{2v_0 \sin(\alpha_2)}{g} = \frac{2v_0 \cos(\alpha_1)}{g}$, и теперь легко заметить, что $L = \frac{2v_0 \sin(\alpha_1)}{g} \cdot \frac{2v_0 \cos(\alpha_1)}{g} \cdot \frac{g}{2}$, то есть $L = \frac{gT_1T_2}{2} \approx 30$ м.

Ответ: 30.

Задача 3 (5 баллов) [равноускоренное движение, равномерное движение]

Прибор наблюдения ПН обнаружил летящий снаряд и зафиксировал его горизонтальную координату x_1 и высоту $h_1 = 1655$ м над Землей. Через $t_1 = 3$ с снаряд упал на Землю и взорвался на расстоянии $l = 1700$ м по горизонтали от места обнаружения. Найти расстояние от места взрыва до пушки, считая сопротивление воздуха пренебрежимо малым. Ускорение свободного падения принять равным $g \approx 10$ м/с^2. Пушка и место взрыва находятся на одной горизонтали. Ответ выразить в километрах, округлив до целого значения.



Подсказка 1: Если рассмотреть движение снаряда, выпущенного из точки взрыва в сторону пушки со скоростью v_0 под тем же углом к горизонту α, что и при выстреле, то он полетит по той же параболе, что и рассматриваемый, но в обратную сторону.

Подсказка 2: Используя закон движения «летящего обратно снаряда», получим: $l = v_0 \cos(\alpha) t_1$ и $h_1 = v_0 \sin(\alpha) t_1 - \frac{g t_1^2}{2}$.

Подсказка 3: Из первого уравнения можно выразить v_0, и после подстановки во второе определить α.

Решение:

Если рассмотреть движение снаряда, выпущенного из точки взрыва в сторону пушки с той же скоростью v_0 под тем же углом к горизонту α, что и при выстреле, то он полетит по той же параболе, что и рассматриваемый, но в обратную сторону. Тогда искомое расстояние соответствует дальности полета. Через время t_1 после выстрела «летящий обратно снаряд» окажется в той же точке, в которой был обнаружен падающий. Если выбрать систему координат с горизонтальной осью x, направленной в сторону пушки и вертикальной осью y, направленной вверх, с началом отсчета координат в точке взрыва, то, используя закон движения «летящего обратно снаряда», получим:

$$\begin{cases} l = v_0 \cos(\alpha) t_1 \\ h_1 = v_0 \sin(\alpha) t_1 - \dfrac{g t_1^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = \dfrac{l}{t_1 \cos(\alpha)} \\ h_1 = l \cdot \mathrm{tg}(\alpha) - \dfrac{g t_1^2}{2} \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим, что $\mathrm{tg}(\alpha) = \dfrac{2h_1 + gt_1^2}{2l} = 1$. Это значит, что $\alpha = 45°$, и тогда $v_0 = \dfrac{\sqrt{2}\, l}{t_1} \approx 801$ м/с. Время полета находится по изменению вертикальной компоненты скорости: $T = \dfrac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$, а дальность – из того соображения, что по горизонтали снаряд движется с постоянной скоростью: $L = v_0 \cos(\alpha) T = \dfrac{2v_0^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} = \dfrac{2l^2}{gt_1^2} \mathrm{tg}(\alpha) \approx 64222$ м. Отметим, что можно (используя выражение для $\mathrm{tg}(\alpha)$) получить и общую формулу для ответа: $L = \dfrac{l(2h_1 + gt_1^2)}{gt_1^2}$.

Ответ: 64.

Задача 4 (4 балла) [прямолинейное движение, равномерное вращение, сложение скоростей, центростремительное ускорение]

Горизонтальная лента транспортера движется со скоростью $u = 1$м/с. Колесо катится без проскальзывания по этой ленте в ту же сторону со скоростью $v_0 = 3$ м/с относительно ленты. Плоскость колеса вертикальна. Найти (в градусах) между векторами ускорения и скорости «самой передней» точки обода колеса в системе отсчета, связанной с неподвижным наблюдателем. Ответ округлите до целого значения.

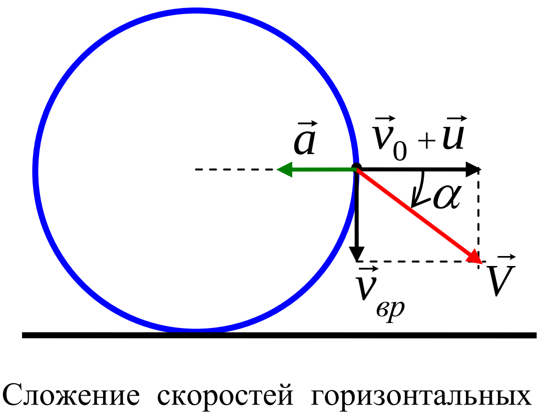
Подсказка 1: Движение этой точки колеса складывается из прямолинейного равномерного движения ленты (скорость u), прямолинейного равномерного движения вместе с центром колеса (скорость v_0 в том же направлении) и равномерного вращения вокруг центра (скорость $v_{вр}$).

Подсказка 2: Поскольку колесо катится без проскальзывания, то величина скорости вращения равна скорости центра колеса относительно поверхности: $v_{вр} = v_0$.

Подсказка 3: Складывая скорости векторно, находим, что скорость этой точки направлена под углом $\alpha = \arcsin(0{,}6) \approx 37°$ к горизонтали.

Решение:

Движение этой точки колеса складывается из прямолинейного равномерного движения ленты (скорость u), прямолинейного равномерного движения вместе с центром колеса (скорость v_0 в том же направлении) и равномерного вращения вокруг центра (скорость $v_{вр}$).

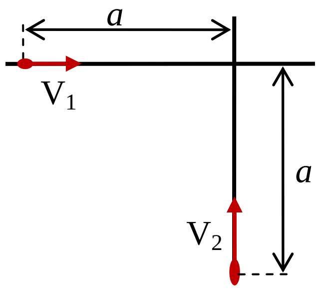


Сложение скоростей горизонтальных движений позволяет найти скорость центра колеса относительно неподвижного наблюдателя $|\vec{v}_0 + \vec{u}| = 4$м/с. Поскольку колесо катится без проскальзывания, то величина скорости вращения равна скорости центра колеса относительно поверхности: $v_{вр} = v_0$. Складывая скорости векторно, находим, что скорость этой точки направлена под углом $\alpha = \arcsin(0,6) \approx 37°$ к горизонтали (см. рисунок). Ускорение прямолинейного равномерного движения равно нулю, поэтому общее ускорение этой точки равно ускорению равномерного вращения по окружности, то есть центростремительному ускорению. Оно направлено по радиусу вращения, то есть к центру колеса. Значит, искомый угол $\beta = 180° - \alpha \approx 143°$.

Ответ: 143.

Задача 5 (4 балла) [прямолинейное движение, выбор системы отсчета]

Два автомобиля подъезжают по разным дорогам к перекрестку (дороги пересекаются под прямым углом – см. рисунок). Скорость первого автомобиля равна $V_1 = 72$ км/час, а скорость второго – $V_2 = 96$ км/час. В начальный момент времени автомобили находятся на одинаковом расстоянии $a = 500$ м от перекрестка. В дальнейшем скорости автомобилей не изменяются. Найдите минимальное расстояние между автомобилями в процессе движения. Ответ запишите в метрах.



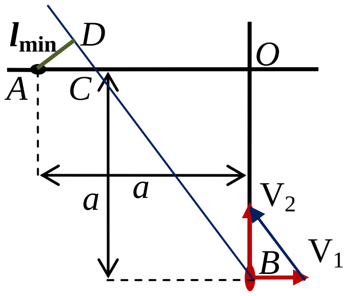
Подсказка 1: Так как нас спрашивают только про величину, характеризующую относительное положение автомобилей, то удобная система отсчета – связанная с одним из автомобилей.

Подсказка 2: В системе отсчета «автомобиль 1» этот автомобиль покоится, а автомобиль 2 движется с постоянной скоростью $\vec{V}_2' = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$.

Подсказка 3: Можно воспользоваться соображениями подобия треугольников.

Решение:

Так как нас спрашивают только про величину, характеризующую относительное положение автомобилей, то удобная система отсчета – связанная с одним из автомобилей. Рассмотрим движение в СО «автомобиль 1». Отметим характерные точки так, как показано на рисунке:



В этой СО автомобиль 1 покоится, а автомобиль 2 движется с постоянной скоростью $\vec{V}_2' = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Построив векторный треугольник скоростей (см. рисунок), мы находим положение линии BD, вдоль которой движется автомобиль 2 в этой системе отсчета. Минимальное расстояние равно длине перпендикуляра AD, опущенного на эту линию. Далее используем подобие треугольников. Треугольник OBC подобен треугольнику скоростей, поэтому $|OC| = \frac{V_1}{V_2} a$. Значит, $|AC| = \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) a$. Треугольник ACD тоже подобен треугольнику скоростей, поэтому $l_{\min} = |AD| = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} |AC| = \frac{V_2 - V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} a$. Подставляя скорости, находим: $l_{\min} = \frac{a}{5} = 100$ м.

ОТВЕТ: 100.

Задача 6 (5 баллов) [прямолинейное движение, выбор системы отсчета]

Однажды Галилео Галилей бросал камешки с Пизанской башни. Один из камешков он бросил горизонтально со скоростью $u = 10$ м/с из точки, находящейся на высоте $H = 51$ м над поверхностью земли. Камешек полетел в направлении мальчика, стоящего на расстоянии $L = 68$ м от башни. В то же мгновение этот мальчик бросил свой камешек с помощью пращи со скоростью $v = 25$ м/с, причем вектор этой скорости был направлен на точку вылета камня Галилея. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, каким будет минимальное расстояние между камешками в процессе полета. Ответ привести в метрах, округлив до десятых.

Подсказка 1: Удобно перейти в систему отсчета, связанную с одним из камней.

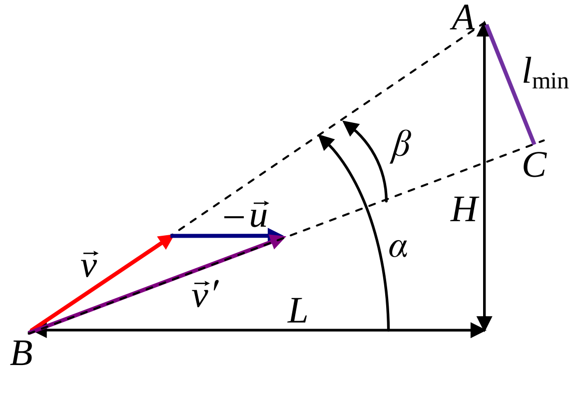
Подсказка 2: В системе отсчета, связанной с камнем Галилея, камень мальчика движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$.

Подсказка 3: $l_{\min}$ соответствует длине перпендикуляра, опущенного из точки положения камня Галилея на линию движения камня мальчика в этой системе отсчета.

Решение:

Удобно перейти в систему отсчета, связанную с одним из камней. В системе отсчета, связанной с камнем Галилея, камень мальчика движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$. $l_{\min}$ соответствует длине перпендикуляра AC, опущенного из точки положения камня Галилея (A) на линию движения камня мальчика BC. При нахождении вектора скорости $\vec{v}'$ он получен как сумма векторов $\vec{v}$ и $-\vec{u}$. Как видно из построения, $l_{\min} = \sqrt{L^2 + H^2} \cdot \sin\beta$. С другой стороны, по теореме синусов для векторного треугольника скоростей (в котором угол напротив стороны $|\vec{u}|$ равен β, а угол напротив стороны $|\vec{v}'|$ равен $(180° - \alpha)$) находим: $\sin\beta = \sin\alpha \frac{u}{v'} = \sin\alpha \frac{u}{\sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\alpha}}$. Учитывая, что $\sqrt{L^2 + H^2} \cdot \sin\alpha = H$ и что $\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + H^2}} = \frac{4}{5}$, получаем:

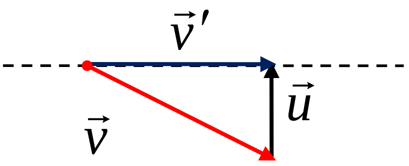
$$l_{\min} = \frac{uH}{\sqrt{u^2 + v^2 + uv \cdot 2L / \sqrt{L^2 + H^2}}} \approx 15{,}2 \text{ м.}$$



Задача 7 (3 балла) [равномерное прямолинейное движение, сложение скоростей]
В безветренную погоду самолет затрачивает на перелет между городами 6 часов. Если во время полета перпендикулярно линии курса дует боковой ветер, то на перелет уходит на 9 минут больше. Найдите скорость самолета относительно воздуха, если скорость ветра постоянна и равна $u = 20$ м/с. Ответ записать в км/ч.
Подсказка 1: Скорость самолета относительно Земли, направленная вдоль линии курса, равна векторной сумме его скорости относительно воздуха и скорости ветра.
Подсказка 2: Скорость движения самолета вдоль курса $v' = \sqrt{v^2 - u^2}$, где v – искомая скорость.
Подсказка 3: Дальность полета $L = vt = v't'$.

Решение:

Скорость самолета относительно Земли, направленная вдоль линии курса, равна векторной



сумме его скорости относительно воздуха $\vec{v}$ и скорости ветра (см. рисунок). Поэтому его скорость движения вдоль курса $v' = \sqrt{v^2 - u^2}$. Время перелета при ветре $t' = \dfrac{L}{\sqrt{v^2 - u^2}}$, и при этом $L = vt$. Поэтому $(v^2 - u^2)(t')^2 = v^2t^2$. Из этого соотношения находим: $v = \dfrac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}u$, где $z \equiv \dfrac{t'}{t} = \dfrac{41}{40}$. Таким образом, $v = \dfrac{41}{9}u \approx \dfrac{820}{9}$ м/с. Это соответствует 328 км/ч.
Ответ: 328.

Задача 8 (3 балла). [инерциальная система отсчета, равномерное движение, свободное падение]
Небольшой упругий мяч, двигаясь вертикально, скачет в лифте, подскакивая на высоту $h = 40$ см от пола лифта. За время, проходящее между двумя ударами мяча о пол, лифт приближается к Земле на расстояние $L = 60$ см. Найти скорость лифта. Ускорение свободного падения принять равным $g \approx 9{,}8$ м/с^2. Ответ выразить в см/с, округлив до целых. Сопротивлением воздуха пренебречь.
Подсказка 1: с лифтом можно связать инерциальную систему отсчета.
Подсказка 2: движение мячика относительно этой системы отсчета не зависит от движения лифта.
Подсказка 3: время, проходящее между двумя ударами мячика о пол, ровно в два раза больше времени свободного падения мячика с высоты h.

Решение:

Ясно, что неизменность h и L означает, что лифт движется равномерно. Пусть τ - время между двумя ударами мяча о пол лифта. В инерциальной СО «лифт» мяч поднимается вверх и падает вниз за половину этого времени, поэтому $h = \dfrac{g(\tau/2)^2}{2} \Rightarrow \tau = 2\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Скорость лифта

$$V = \frac{L}{\tau} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}} \approx 1{,}05 \text{ м/с}.$$

ОТВЕТ: 105

Задача 9 (6 баллов). [равномерное движение, свободное падение, равноускоренное движение, преследование]
Два самолета летят встречными курсами в одной вертикальной плоскости с одинаковыми по величине скоростями $V = 100$ м/с, один – на высоте $h_1 = 3500$ м, другой – на высоте $h_2 = 6000$ м. В тот момент, когда они оказались точно один над другим, с верхнего самолета сбрасывают небольшую бомбу, а с нижнего выпускают ракету. Сила тяги двигателя ракеты

сообщает ей ускорение $a = 12$ м/с^2. Программа ракеты обеспечивает попадание ракеты в бомбу за минимальное возможное время. Найдите это время. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ выразите в секундах, округлив до десятых.
Подсказка 1: в «свободно падающей» системе отсчета бомба движется равномерно и прямолинейно, а ракета – с ускорением $a = 12$ м/с^2.
Подсказка 2: самая удобная система отсчета – «свободно падающая» с начальной скоростью, равной начальной скорости ракеты.
Подсказка 3: в этой системе отсчета ракета движется по прямой с постоянным ускорением в точку встречи $a = 12$ м/с^2 с нулевой начальной скоростью, бомба – по прямой со скоростью $2V = 200$ м/с перпендикулярно линии, соединяющей точки их начальных положений.

Решение:

Перейдем в «удобную» СО – «свободно падающую» с начальной скоростью, равной начальной скорости ракеты. В этой СО бомба движется «горизонтально» с постоянной скоростью $2V = 200$ м/с, а ракета – с нулевой начальной скоростью и постоянным ускорением $a = 12$ м/с^2 по прямой. Так как в начальный момент времени бомба и ракета находятся на одной вертикали на расстоянии $h = h_2 - h_1 = 2500$ м, то

$$\left(\frac{at^2}{2}\right)^2 = (2Vt)^2 + (h_2 - h_1)^2 \Rightarrow t^4 - 16\frac{V^2}{a^2}t^2 - 4\frac{(h_2 - h_1)^2}{a^2} = 0.$$

Решая это уравнение с учетом того, что $t^2 > 0$, находим:

$$t^2 = \frac{8V^2}{a^2} + \sqrt{\frac{64V^4}{a^4} + \frac{4(h_2 - h_1)^2}{a^2}} \Rightarrow t = \frac{2V}{a}\sqrt{2 + \sqrt{4 + \frac{a^2(h_2 - h_1)^2}{4V^4}}}.$$

Подставляя численные значения, находим: $t = 25\sqrt{2}$ с $\approx 35{,}355$ с.
ОТВЕТ: 35,4 (допустимый интервал от 35,3 до 35,4).