11 класс, Экспресс-подготовка к ЕГЭ по физике

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 8.

Темы: гармонические колебания.

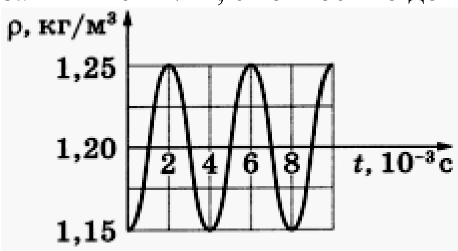
Задача 1 (1 балл) [звуковые волны, скорость звука]
Сигнал гидролокатора подводной лодки, отразившись от препятствия, находящегося в 3 км от лодки, зарегистрирован через 5 с после его подачи. Частота излучения гидролокатора 8 кГц. Чему равна длина волны этого звукового сигнала в воде? Ответ запишите в см, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Путь, пройденный звуковым сигналом, равен $2r = 6000$м.
Подсказка 2: Скорость распространения звука $V_{зв} = \lambda \cdot \nu$.

Решение:
Путь, пройденный звуковым сигналом, равен $2r = 6000$м. Значит, скорость распространения для него $V_{зв} = \frac{2r}{t} = \lambda \cdot \nu = 1200$м/с. Поэтому $\lambda = \frac{2r}{\nu t} = 0{,}15$м.

Ответ: 15.

Задача 2 (1 балл) [колебания, амплитуда колебаний]
На рисунке представлен график зависимости плотности воздуха от времени при прохождении звуковой волны. Чему равна амплитуда колебаний плотности воздуха? Ответ запишите в г/м^3, с точностью до целого значения.



Подсказка 1: Амплитудой колебаний называют величину максимального отклонения от равновесного значения.

Решение:
Амплитудой колебаний называют величину максимального отклонения от равновесного значения. Из графика видно, что равновесное значение плотности воздуха при этих колебаниях – это 1,20 кг/м^3. Максимальное отклонение от него в процессе колебаний равно 0,05 кг/м^3=50 г/м^3.

Ответ: 50.

Задача 3 (2 балла) [гармонические колебания, пружинный маятник]
Груз массой 1 кг, закрепленный на пружине с жесткостью 400 Н/м, совершает гармонические колебания. Максимальная величина ускорения груза в процессе колебаний равна 8 м/с^2. Какова максимальная величина скорости груза? Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Максимальное ускорение груз испытывает в момент максимума возвращающей силы, то есть при максимальном отклонении: $a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m} = \frac{k}{m} x_{\max}$.

Подсказка 2: Максимальная скорость достигается в момент прохождения равновесия, когда вся энергия колебаний становится кинетической энергией груза, которая также равна максимальной потенциальной энергии при максимальном отклонении.

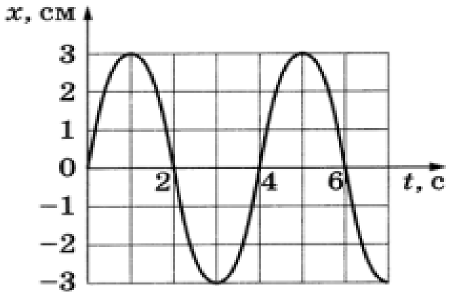
Решение:

Максимальное ускорение груз испытывает в момент максимума возвращающей силы, то есть при максимальном отклонении: $a_{max} = \frac{F_{max}}{m} = \frac{k}{m} x_{max}$. Максимальная скорость достигается в момент прохождения равновесия, когда вся энергия колебаний становится кинетической энергией груза $\frac{mv_{max}^2}{2}$, которая также равна максимальной потенциальной энергии при максимальном отклонении: $\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} x_{max}$. Следовательно, $v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}} a_{max} = 0{,}4$ м/с.

Ответ: 0,4.

Задача 4 (2 балла) [гармонические колебания, пружинный маятник]

На рисунке представлен график зависимости координаты груза пружинного маятника от времени. Трение пренебрежимо мало. Чему равна амплитуда колебаний скорости груза? Ответ запишите в см/с, с точностью до десятых.



Подсказка 1: Амплитудой колебаний называют величину максимального отклонения от равновесного значения.

Решение:

Пружинный маятник в отсутствие трения совершает гармонические колебания. При гармонических колебаниях амплитуда колебаний скорости связана с амплитудой колебания смещения соотношением $v_m = \omega x_m$. Циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, и поэтому $v_m = \frac{2\pi x_m}{T}$. Из графика видно, что $x_m = 3$ см, а $T = 4$ с. Таким образом, $v_m \approx 4{,}7$ см/с.

Ответ: 4,7.

Задача 5 (2 балла) [гармонические колебания, пружинный маятник]

Небольшой груз, который может скользить без трения по горизонтальной направляющей, прикреплен к концу легкой пружины, второй конец которой закреплен. Груз стартует из положения, в котором пружина растянута на $\Delta l_0 = 4$ см, со скоростью $v_0 = 0{,}3$ м/с. Период колебаний оказался равен $T \approx 0{,}628$ с. Какова будет амплитуда колебаний груза? Сопротивление воздуха и трение пренебрежимо малы. Ответ приведите в см, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: В ходе колебаний пружинного маятника сохраняется полная механическая энергия, равная сумме кинетической энергии груза и потенциальной энергии деформированной пружины $\frac{mv_x^2}{2}+\frac{k(\Delta l)^2}{2}=const=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{k(\Delta l_0)^2}{2}$.

Подсказка 2: В момент максимального растяжения (или сжатия) пружины скорость обращается в ноль, поэтому вся энергия становится энергией деформированной пружины $\frac{mv_0^2}{2}+\frac{k(\Delta l_0)^2}{2}=\frac{k(x_m)^2}{2}$.

Решение:

Здесь проще анализировать не движение, а превращения энергии. В ходе колебаний пружинного маятника сохраняется полная механическая энергия, равная сумме кинетической энергии груза и потенциальной энергии деформированной пружины $\frac{mv_x^2}{2}+\frac{k(\Delta l)^2}{2}=E=const$. Величину полной энергии можно вычислить по начальным условиям $E=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{k(\Delta l_0)^2}{2}$. В момент максимального растяжения (или сжатия) пружины скорость обращается в ноль, поэтому вся энергия становится энергией деформированной пружины $\frac{mv_0^2}{2}+\frac{k(\Delta l_0)^2}{2}=\frac{k(\Delta l_m)^2}{2}$. Так как положению равновесия в заданных условиях отвечает $\Delta l=0$, то амплитуда колебаний груза – это и есть величина максимальной деформации пружины. Значит, $x_m=|\Delta l_m|=\sqrt{(\Delta l_0)^2+\frac{m}{k}v_0^2}$. Период пружинного маятника $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, то есть $\frac{m}{k}=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$ и $x_m=\sqrt{(\Delta l_0)^2+\left(\frac{Tv_0}{2\pi}\right)^2}\approx 5$ см.

Ответ: 5.

Задача 6 (2 балла) [гармонические колебания, математический маятник]

Шарик на длинной легкой нерастяжимой нити совершает колебания. Максимальная потенциальная энергия шарика в поле тяжести, если ее считать равной нулю в положении равновесия, равна 0,8 Дж. Максимальная скорость шарика в процессе колебаний равна 2 м/с. Чему равна масса шарика? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ запишите в граммах.

Подсказка 1: В процессе колебаний потенциальная энергия шарика в поле тяжести переходит в его кинетическую энергию и обратно, причем их сумма остается неизменной.

Подсказка 2: Максимальная кинетическая энергия достигается при прохождении равновесия, а максимальная потенциальная – в момент остановки.

Решение:

Поскольку сопротивление воздуха отсутствует, то полная механическая энергия сохраняется. В процессе колебаний потенциальная энергия шарика в поле тяжести переходит в его кинетическую энергию и обратно. Максимальная кинетическая энергия, равная $\frac{mv_{\max}^2}{2}$, достигается при прохождении равновесия, а максимальная потенциальная ($E=0{,}8$ Дж) – в момент остановки. Поэтому $\frac{mv_{\max}^2}{2}=E\Rightarrow m=\frac{2E}{v_{\max}^2}=0{,}4$ кг.

Ответ: 400.

Задача 7 (3 балла) [пружинный маятник, потенциальная энергия]

Как известно, **потенциальная энергия** в механике всегда определяется <u>с точностью до постоянной величины</u>, поскольку физический смысл имеет только ее изменение, равное взятой со знаком минус работе сил по перемещению тела: $E_{пот}(2)-E_{пот}(1)=-A_{12}$. Поэтому мы обычно ***калибруем*** потенциальную энергию, то есть указываем, в какой точке она принимается равной нулю. Рассмотрите груз массы $m=0{,}1$ кг, подвешенный на невесомой вертикальной пружине жесткостью $k=20$ Н/м в однородном поле тяжести $g\approx 10$ м/с^2. Получите формулу для потенциальной энергии системы, равной сумме потенциальной энергии груза в поле тяжести и энергии деформированной пружины. При этом *откалибруйте* это выражение таком образом, чтобы полная потенциальная энергии системы равнялась нулю в положении равновесия груза и запишите ее как функцию координаты x, отсчитываемой от этого же положения. Вычислите величину полной потенциальной энергии при $x=10$ см. Ответ запишите в джоулях, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Полная потенциальная энергия системы $E_{пот}=mgh+\dfrac{k(\Delta l)^2}{2}$, где h – высота положения тела над «нулевым» уровнем (можно сразу договориться совместить этот уровень с уровнем положения равновесия груза), а Δl – деформация пружины.
Подсказка 2: В положении равновесия груза сила упругости пружины уравновешивает силу тяжести, поэтому пружина в этом положении растянута на величину $\Delta l_0=+\dfrac{mg}{k}$.

Подсказка 3: Если направить координатную ось x вертикально вверх, отсчитывая координату x как было задано в условии (от положения равновесия), то при нахождении груза в точке с координатой x высота $h=x$, а деформация пружины $\Delta l=\dfrac{mg}{k}-x$.

Решение:

Полная потенциальная энергия системы $E_{пот}=mgh+\dfrac{k(\Delta l)^2}{2}$, где h – высота положения тела над «нулевым» уровнем (сразу договоримся совместить этот уровень с уровнем положения равновесия груза), а Δl – деформация пружины. Отметим, что в положении равновесия груза сила упругости пружины уравновешивает силу тяжести, поэтому пружина в этом положении растянута на величину $\Delta l_0=+\dfrac{mg}{k}$. Направим координатную ось x вертикально вверх, отсчитывая координату x как было задано в условии – от положения равновесия. Тогда при нахождении груза в точке с координатой x высота $h=x$, а деформация пружины $\Delta l=\dfrac{mg}{k}-x$. Полная потенциальная энергия (пока не откалиброванная) $E_{пот}=mgx+\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{mg}{k}-x\right)^2=\dfrac{m^2g^2}{2k}+\dfrac{kx^2}{2}$. Для калибровки нужно вычесть из этого выражение значение данной функции в нуле: $\tilde{E}_{пот}(x)\equiv E_{пот}(x)-E_{пот}(0)=\dfrac{kx^2}{2}$, и при $x=10$ см она равна $\tilde{E}_{пот}=\dfrac{kx^2}{2}=0{,}1$ Дж. Мы обнаружили замечательное обстоятельство: если отсчитывать координату пружинного маятника от положения равновесия и калибровать полную потенциальную энергию маятника так, чтобы она равнялась нулю в этом положении, то формула для полной потенциальной энергии – **всегда** $\tilde{E}_{пот}(x)=\dfrac{kx^2}{2}$, даже если на груз действует еще какая-нибудь постоянная сила! На самом деле это справедливо для любой системы, совершающей гармонические колебания. Данное задание не похоже на задания ЕГЭ, оно скорее является теоретическим упражнением.

Ответ: 0,1.

Задача 8 (4 балла) [гармонические колебания, пружинный маятник]
Небольшой груз совершает вертикальные колебания на легкой пружине с периодом $T = 2$ с и амплитудой $A = 3$ см. В момент прохождения крайнего верхнего положения груза на него сверху падает шарик из размягченного металла, который тут же «приваривается» к грузу. Масса шарика составляет 20% от массы груза, а его скорость перед ударом равнялась $v = 0{,}5$ м/с. Какой стала амплитуда колебаний груза? Ответ запишите в см, округлив до сотых.

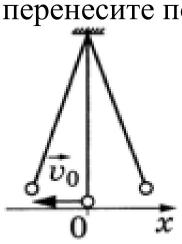
Подсказка 1: В момент максимального отклонения груза его скорость равна нулю, и поэтому скорость «нового» груза после абсолютно неупругого удара, определяется из уравнения закона сохранения импульса.
Подсказка 2: Полная механическая энергия «нового» груза равна его потенциальной энергии в момент наибольшего отклонения $\frac{k\tilde{A}^2}{2}$, где $\tilde{A}$ – искомая новая амплитуда.

Подсказка 3: Период колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Решение:
В момент максимального отклонения груза его скорость равна нулю, и поэтому скорость «нового» груза после абсолютно неупругого удара, согласно закону сохранения импульса, определяется из уравнения $0{,}2mv = 1{,}2mV \Rightarrow V = \frac{v}{6}$. Полная механическая энергия «нового» груза $E = \frac{kA^2}{2} + \frac{1{,}2mV^2}{2} = \frac{kA^2}{2} + \frac{mv^2}{60}$ равна его потенциальной энергии в момент наибольшего отклонения $\frac{k\tilde{A}^2}{2}$, где $\tilde{A}$ – искомая новая амплитуда. Поэтому $\tilde{A} = \sqrt{A^2 + \frac{1}{30}\frac{m}{k}v^2}$. Период колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, и в результате приходим к соотношению $\tilde{A} = \sqrt{A^2 + \frac{1}{120\pi^2}v^2T^2} \approx 4{,}18$ см.

Ответ: 4,18.

Задача 9 (2 балла) [гармонические колебания, математический маятник]
Небольшой груз совершает колебания на легкой нерастяжимой нити. В момент $t = 0$ он вышел из положения равновесия с некоторой начальной скоростью (см. рисунок). На графиках А и В показано изменение с течением времени физических величин, характеризующих движение груза после этого момента. Установите соответствие между графиками и физическими величинами, изменение которых они могут представлять (потенциальную энергию груза в поле тяжести в положении равновесия принять равной нулю). К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами. В ответ перенесите получившуюся пару цифр, не разделяя их пробелами или знаками препинания.



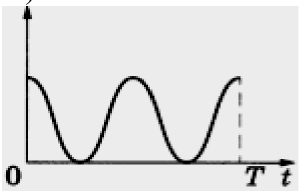
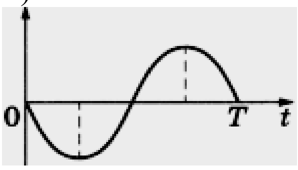
ГРАФИКИ	ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ
А)  Б)  	**1) координата *x* груза** **2) проекция v_x скорости груза** **3) кинетическая энергия груза $E_К$** **4) потенциальная энергия груза $E_П$**

Таблица для ответа:

А	Б

Подсказка 1: Период изменения энергетических характеристик в два раза меньше, чем период изменения координаты.
Подсказка 2: В начальный момент координата равна нулю, а скорость максимальна по модулю.

Решение:

В начальный момент координата равна нулю (и, следовательно, потенциальная энергия равна нулю), а скорость максимальна по модулю (и вместе с ней кинетическая энергия максимальна). Период изменения энергетических характеристик в два раза меньше, чем период изменения координаты. Поэтому график А – это энергия, и по начальному значению видно, что это кинетическая энергия (А → 3), а график Б – координата (начальное значение равно 0, и начальное изменение – в область отрицательных значений: Б → 1).

Ответ: 31.

Задача 10 (4 балла) [сила трения, пружинный маятник, гармонические колебания]
Доска массы $M = 500$г находится на гладкой горизонтальной поверхности. На доске лежит груз массы $m = 100$г, прикрепленный к неподвижной стенке легкой пружиной жесткости $k = 15$Н/м. Ось пружины горизонтальна, коэффициент трения между доской и грузом равен $\mu = 0,4$. Найти максимальную амплитуду гармонических колебаний груза на пружине. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с^2. Ответ выразить в миллиметрах, округлив до целых.
Подсказка 1: гармоничность колебаний нарушается, когда груз начинает скользить по доске.
Подсказка 2: пока проскальзывания нет, уравнение движения доски с грузом $(M+m)a_x = -kx \Rightarrow x'' + \dfrac{k}{M+m}x = 0$.
Подсказка 3: ускорение доски создается силой трения со стороны груза, который прижат к доске силой тяжести, то есть $Ma_m = M\omega^2 x_m \le \mu mg$.

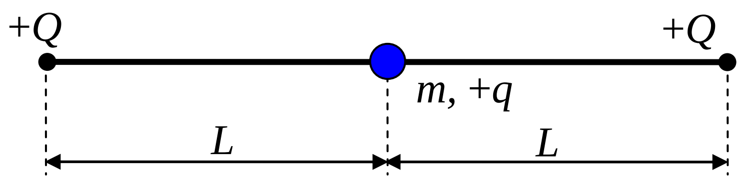
Решение:

Начнем с определения причины нарушения гармоничности. Пока груз не скользит по доске, они вместе совершают гармонические колебания, но после того, как начинается проскальзывание, механическая энергия переходит в тепло, и колебания начинают затухать, а следовательно – перестают быть гармоническими. Пока проскальзывания нет, уравнение движения доски с грузом $(M+m)a_x = -kx \Rightarrow x'' + \dfrac{k}{M+m}x = 0$, и гармонические колебания происходят с циклической частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$. Если амплитуда колебаний равна x_m, то амплитуда изменения ускорения $a_m = \omega^2 x_m = \dfrac{kx_m}{M+m}$. Ускорение доски создается силой трения со стороны груза, который прижат к доске силой тяжести. Поскольку в отсутствие проскальзывания должно быть $|F_{mp}| \le \mu N$, то $Ma_m \le \mu mg \Rightarrow x_m \le \dfrac{\mu m(M+m)g}{Mk} \approx 32$мм.

Ответ: 32.

Задача 11 (4 балла) [электростатическое взаимодействие, малые колебания, уравнение гармонических колебаний]

По гладкому горизонтальному неподвижному непроводящему стержню длиной $2L$ может свободно скользить небольшая бусинка массой m с зарядом $q > 0$. На концах стержня закреплены одинаковые точечные заряды $Q > 0$ (см. рисунок). При малом отклонении бусинки от начального положения возникли колебания с периодом T_0. Во сколько раз изменится период малых колебаний бусинки, если величину заряда бусинки уменьшить в 4 раза? Излучением пренебречь.



Подсказка 1: в точке с координатой x, отсчитываемой вдоль направляющей от начального положения, бусинка будет находиться на расстояниях $r_1 = r_2 = \sqrt{L^2 + x^2}$ от закрепленных зарядов.

Подсказка 2: проекция на ось x суммарной силы взаимодействия бусинки с закрепленными зарядами $F_x = -q \cdot 2\dfrac{kQ}{L^2 + x^2}\dfrac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}}$.

Подсказка 3: уравнение малых колебаний бусинки приводится к виду уравнения гармонических колебаний $x'' + \dfrac{2kqQx}{mL^3} = 0$.

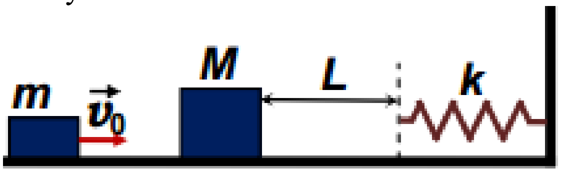
Решение:

Направим координатную ось x по линии движения бусинки, совместив начало координат с точкой равновесия. При смещении на x от положения равновесия сила отталкивания от зарядов будет возвращать ее в исходное положение. Так как расстояния до зарядов в случае отклонения будут равны $r_1 = L - x$ и $r_2 = L + x$, то возвращающая сила $F_x = -\dfrac{kQq}{(L-x)^2} + \dfrac{kQq}{(L+x)^2} = -\dfrac{4kQq}{(L^2 - x^2)^2}Lx$. Конечно, эта сила не является линейной по x в общем случае, но для малых $x << L$ $F_x \approx -\dfrac{4kqQx}{L^3}$, и в результате уравнение малых колебаний бусинки $ma_x = F_x$ приводится к виду уравнения гармонических колебаний $x'' + \dfrac{4kqQx}{mL^3} = 0$. Таким образом, период малых колебаний бусинки $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \approx \pi L\sqrt{\dfrac{mL}{kqQ}}$.

Поэтому при уменьшении q в 4 раза период колебаний увеличится в два раза.

Ответ: 2.

Задача 12 (4 балла) [абсолютно неупругий удар, гармонические колебания]
Небольшой брусок массой $m = 200$г, скользивший по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v_0 = 2$ м/с, сталкивается с покоящимся бруском массой $M = 600$г. Слипшиеся бруски, двигаясь поступательно и пройдя путь $L = 20$см, налетают на недеформированную легкую пружину жесткостью $k = 20$Н/м, второй конец которой прикреплен к стене (см. рисунок). До касания центр масс слипшихся брусков двигался строго вдоль оси пружины, и через некоторое время они двигались в обратном направлении в точности по пути движения к пружине. За какое время t после абсолютно неупругого соударения бруски вернутся в точку столкновения? Ответ запишите в секундах, с точностью до сотых.



Подсказка 1: При абсолютно неупругом соударении сохраняется горизонтальная проекция импульса брусков.
Подсказка 2 После касания пружины грузы с пружиной образуют пружинный маятник, и грузы будут двигаться по гармоническому закону.
Подсказка 3: Длительность гармонической фазы движения брусков в контакте с пружиной $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$.

Решение:

Так как трения нет, то в процессе абсолютно неупругого соударения в горизонтальном направлении на бруски действуют только силы их взаимодействия между собой. Поэтому при соударении сохраняется горизонтальная проекция импульса брусков, то есть $mv_0 = (m+M)v_1$, где v_1 – скорость брусков после соударения. Следовательно, $v_1 = \frac{m}{M+m}v_0$.

Так как поверхность гладкая и горизонтальная, и связанную с ней систему отсчета мы считаем инерциальной, то поступательное движение слипшихся брусков будет равномерным, и время их движения до касания пружины $t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{M+m}{m}\frac{L}{v_0}$.

После касания пружины грузы с пружиной образуют пружинный маятник, и грузы будут двигаться по гармоническому закону с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$. Спустя полпериода колебаний пружина вернется в недеформированное состояние, а бруски будут двигаться со скоростью v_1 в противоположную сторону. Из условия ясно, что бруски после этого отрываются от пружины. Поэтому длительность гармонической фазы движения брусков в контакте с пружиной $t_2 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$.

Ясно, что после отрыва от пружины бруски снова двигаются равномерно, и им до точки удара нужно пройти тот же путь, что от точки удара до точки касания пружины. Поэтому движение до точки удара займет у брусков время $t_3 = t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{M+m}{m}\frac{L}{v_0}$.

Следовательно, полное время возвращения брусков в точку удара $t = t_1 + t_2 + t_3 = 2\frac{M+m}{m}\frac{L}{v_0} + \pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} \approx 1{,}43$с.

Ответ: 1,43.

Задача 13 (3 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]
В идеальном колебательном контуре, содержащем источник ЭДС (см. рисунок 2), происходят гармонические колебания. На графиках представлены зависимости от времени заряда конденсатора, силы тока, возникающей в катушке ЭДС индукции, энергии магнитного поля в катушке. Сопротивлением всех элементов контура можно пренебречь пренебречь. Известно, что на приведенных графиках изображены зависимости от времени четырех величин: силы тока в контуре, заряда конденсатора, Энергии магнитного поля в катушке и ЭДС индукции в катушке. Выберите два верных утверждения из приведенных ниже. В качестве ответа укажите номера верных утверждений, не разделяя их пробелами или знаками препинания (например: 12).

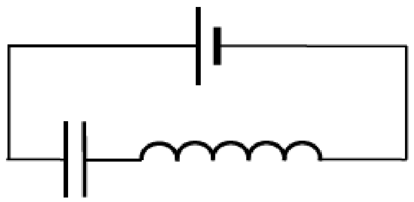
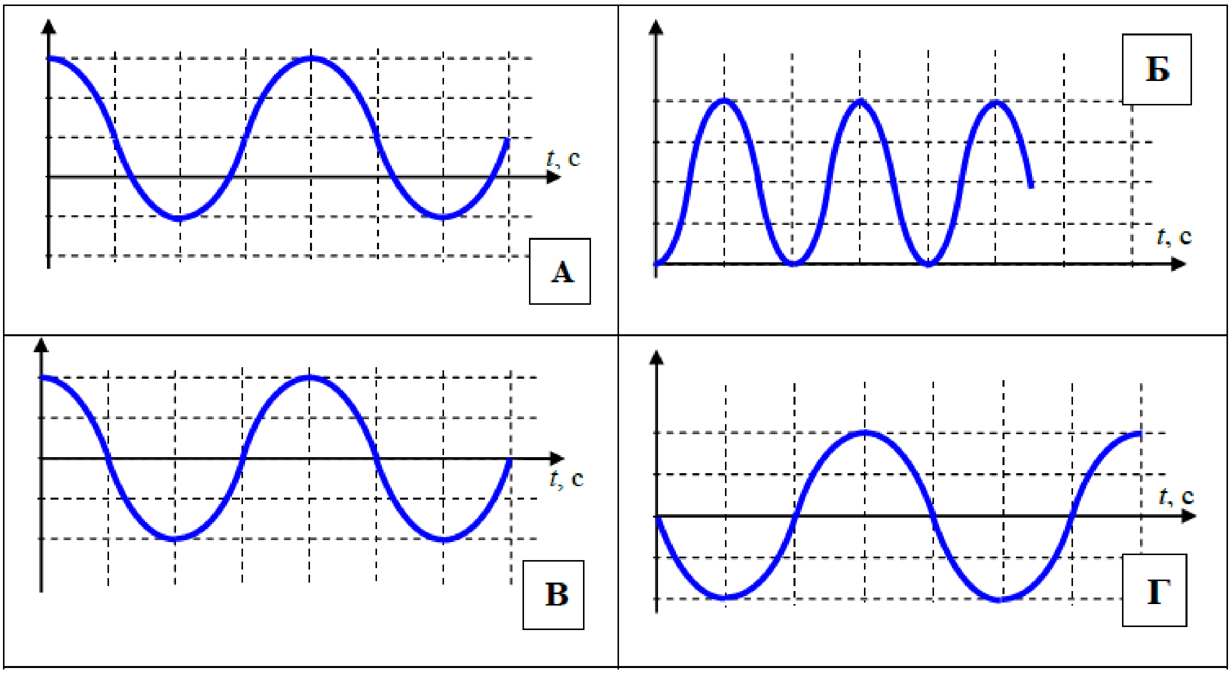


рисунок 2



1. График В описывает изменение энергии магнитного поля в катушке.
2. График Б описывает изменение энергии магнитного поля в катушке.
3. График А описывает изменение тока в контуре.
4. График В описывает изменение заряда конденсатора.
5. График Г описывает изменение тока в контуре.
6. График А описывает изменение ЭДС индукции в катушке.

Таблица для ответа:

Подсказка 1: проще всего установить, где находится графики заряда конденсатора и энергии магнитного поля.
Подсказка 2: колебания заряда конденсатора из-за присутствия источника происходят «несимметрично» относительно оси времени, несмотря на то, что он меняет знак, а энергия магнитного поля – единственная из заданных величин, которая всегда положительна.
Подсказка 3: колебания заряда конденсатора показаны на графике А.

Решение:

Проще всего установить, где находится графики заряда конденсатора и энергии магнитного поля: колебания заряда конденсатора $q(t) = C\mathrm{E} + q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ (Е - ЭДС источника) происходят «несимметрично» относительно оси времени, несмотря на то, что он меняет знак, поэтому ему соответствует график А (после этого вывода можно заметить, что $\varphi_0 = 0$). Сразу становится ясно, что утверждения 3, 6 и 4 неверны. Энергия магнитного поля – единственная из заданных величин, которая всегда положительна, и ей соответствует график Б. Значит, утверждение 2 – верно, а 1 – нет. Поскольку верных утверждений два, то 5 должно быть верно. И действительно, сила тока должна проходить нули и максимумы «синхронно» с энергией магнитного поля, а таким свойством обладает только график Г.
Примечание: как теперь понятно, график В описывает поведение ЭДС индукции в катушке. Действительно эта ЭДС пропорциональна скорости изменения тока ($\mathrm{E}_i = -L\dfrac{dI}{dt}$), поэтому она проходит через ноль в моменты, когда ток (график Г) проходит через максимумы и минимумы.
Еще один способ все проверить: исходя из выражения для заряда $q(t) = C\mathrm{E} + q_m \cos(\omega t)$, можно найти, что: $I(t) = \dfrac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t)$, $E_L(t) = \dfrac{LI^2}{2} = \dfrac{L\omega^2 q_m^2}{2}\sin^2(\omega t)$, $\mathrm{E}_i = -L\dfrac{dI}{dt} = L\omega^2 q_m \cos(\omega t)$. Тогда видно, что эти выражения отвечают найденным графикам.

Ответ: 25.

Задача 14 (3 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]
В идеальном колебательном контуре происходят свободные электромагнитные колебания. В таблице показано, как изменялся заряд на одной из обкладок конденсатора в контуре с течением времени:

t, мкс	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
q, нКл	2,12	3,00	2,12	0	-2,12	-3,00	-2,12	0	2,12	3,00

Чему равно максимальное значение силы тока в катушке? Ответ дайте в мА, округлив до десятых.

Подсказка 1: Из таблицы видно, что период электромагнитных колебаний в контуре $T = 16$ мкс, а максимальный заряд конденсатора $q_{\max} \approx 3{,}00$ нКл.

Подсказка 2: Максимальная сила токи в катушке и максимальный заряд конденсатора связаны соотношением $\dfrac{LI_{\max}^2}{2} = \dfrac{q_{\max}^2}{2C}$.

Подсказка 3: Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Решение:

Из таблицы видно, что период электромагнитных колебаний в контуре $T = 16$ мкс, а максимальный заряд конденсатора $q_{\max} \approx 3{,}00$ нКл. В соответствии с законом сохранения энергии, максимальная сила токи в катушке и максимальный заряд конденсатора связаны соотношением $\dfrac{LI_{\max}^2}{2} = \dfrac{q_{\max}^2}{2C} \Rightarrow I_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} q_{\max}$. Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$, поэтому $I_{\max} = \dfrac{2\pi}{T} q_{\max} \approx 1{,}2$ мА.

Ответ:1,2.

Задача 15 (4 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]
В идеальном колебательном контуре происходят свободные электромагнитные колебания. В таблице показано, как изменялся ток в контуре с течением времени, с точностью до сотой доли Ампера:

t, мкс	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
I, А	+2,83	0	- 2,83	- 4,00	- 2,83	0	+2,83	+4,00	+2,83	0

Чему равна энергия электрического поля в конденсаторе в момент времени $t = 8$ мкс? Емкость конденсатора $C = 7$ нФ. Ответ дайте в мДж, округлив до десятых.
Подсказка 1: Из таблицы видно, что период колебаний в катушке $T = 16$ мкс, а амплитуда колебаний тока $I_m = 4$ А.

Подсказка 2: По закону сохранения энергии $E_L + E_C = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$.

Подсказка 3: Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Решение:

Из таблицы видно, что период колебаний в катушке $T = 16$ мкс (при гармонических колебаниях обращения тока в ноль происходят через половину периода), а амплитуда колебаний тока $I_m = 4$ А (это значение со знаком плюс или минус находится точно посередине между двумя нулями). По закону сохранения энергии в любой момент времени $E_L + E_C = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} \Rightarrow E_C = \frac{L}{2}(I_m^2 - I^2)$. Кроме того, по формуле Томсона, период собственных колебаний тока $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Поэтому $L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}$, откуда

$$E_C = \frac{T^2}{8\pi^2 C}(I_m^2 - I^2) \approx 3{,}7 \text{ мДж}.$$

Ответ: 3,7.

Задача 16 (4 балла) [гармонические колебания, колебательный контур, закон колебаний]
В идеальном колебательном контуре происходят гармонические колебания с периодом $T = 0{,}628$ мс. В некоторый момент времени заряд конденсатора оказался равен $q_0 = 20$ мкКл, а ток в катушке $I_0 = 0{,}1$ А (полярность показана на рисунке 5). Через какое время после этого заряд конденсатора впервые обратится в ноль? Ответ выразить в мс, округлив до десятых.

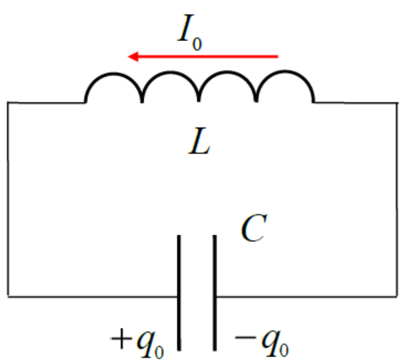


рисунок 5

Подсказка 1: гармонические колебания заряда и тока в идеальном контуре описываются выражениями: $q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, $I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Подсказка 2: в момент времени $t = 0$ начальные значения $q_0 = q_m \cdot \cos(\varphi_0)$, $I_0 = -\omega q_m \cdot \sin(\varphi_0)$ (причем I_0 положительно в соответствии с направлением тока, показанным на рисунке 4 – видно, что ток «дозаряжает» конденсатор).

Подсказка 3: из этих соотношений: $tg(\varphi_0) = -\frac{I_0}{\omega q_0} = -\frac{I_0 T}{2\pi q_0} \approx -0{,}5$.

Решение:

Гармонические колебания заряда и тока в идеальном контуре описываются выражениями: $q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, $I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$. Поэтому $q_0 = q_m \cdot \cos(\varphi_0)$, $I_0 = -\omega q_m \cdot \sin(\varphi_0)$ (причем I_0 положительно в соответствии с направлением тока, показанным на рисунке 4 – видно, что ток «дозаряжает» конденсатор). Как видно, $tg(\varphi_0) = -\frac{I_0}{\omega q_0} = -\frac{I_0 T}{2\pi q_0} \approx -0{,}5$. Моменты обращения заряда в ноль определяются из равенства $q(t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$. Минимальный положительный корень отвечает $t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + arctg(0{,}5)\right) = T\left(\frac{1}{4} + \frac{arctg(0{,}5)}{2\pi}\right) \approx 0{,}2$ мс.

Ответ: 0,2.

Задача 17 (4 балла) [закон Ома, колебательный контур, энергия колебаний, затухающие колебания]

В схеме, показанной на рисунке 6, ключ К достаточно долго был замкнут. Какое количество теплоты выделится в нити лампы после размыкания ключа? Емкость конденсатора $C = 5$ мкФ, индуктивность катушки $L = 50$ мГн, сопротивление нити лампочки можно считать постоянным и равным трети сопротивления резистора $R = 100$ Ом, омическое сопротивление катушки и внутреннее сопротивление источника пренебрежимо малы. ЭДС источника $E = 80$ В. Ответ выразить в мДж.

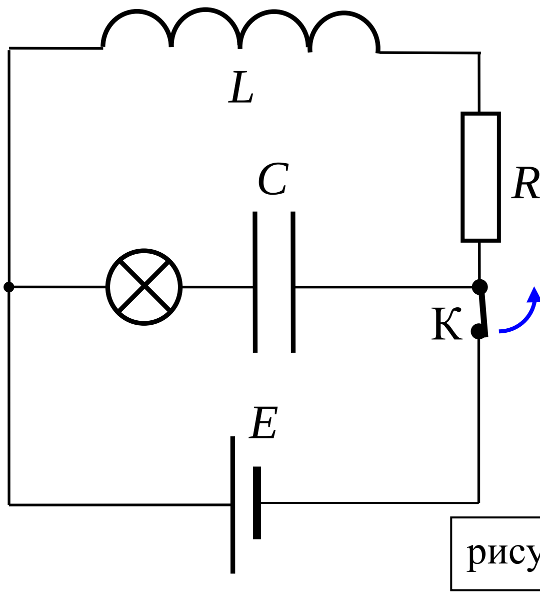


рисунок 6

Подсказка 1: пока ключ замкнут, в ветви с катушкой и резистором течет постоянный ток $I_0 = \frac{E}{R}$, а напряжение на конденсаторе равно E.

Подсказка 2: после размыкания ключа в контуре начинаются затухающие колебания, в ходе которых практически вся накопленная энергия (то есть энергия полей в конденсаторе и в катушке) выделяется в схеме в виде тепла.

Подсказка 3: это тепло распределяется между элементами контура пропорционально их сопротивлениям.

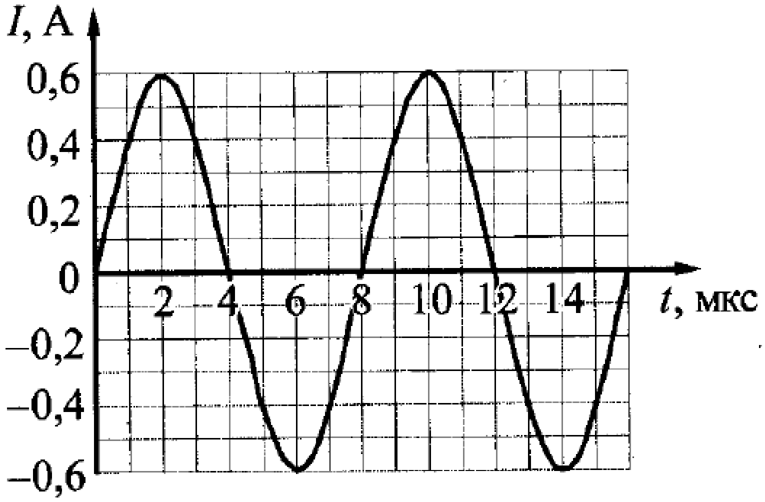
Решение:

Пока ключ был замкнут, схема перешла в «установившийся» (стационарный) режим, в котором в ветви с катушкой и резистором течет постоянный ток, определяемый из закона Ома для полной цепи: $I_0 = \dfrac{E}{R}$, напряжение на конденсаторе равно E, и его заряд $q_0 = CE$. После размыкания ключа в контуре начинаются затухающие колебания, в ходе которых вся накопленная энергия $W_0 = \dfrac{q_0^2}{2C} + \dfrac{LI_0^2}{2} = \left(C + \dfrac{L}{R^2}\right)\dfrac{E^2}{2}$ выделяется в схеме в виде тепла (излучением пренебрегаем). Это тепло распределяется между элементами контура пропорционально их сопротивлениям (так как все они соединены последовательно). Пренебрегая сопротивлением катушки, приходим к выводу, что четверть общего количества теплоты (Q_1) выделяется в нити лампы, а три четверти (Q_2) – в резисторе. Таким образом, $Q_1 = \dfrac{1}{4}W_0 = \left(C + \dfrac{L}{R^2}\right)\dfrac{E^2}{8} = 8$мДж.

Ответ: 8.

Задача 18 (4 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]

Сила тока в идеальном колебательном контуре изменяется со временим так, как показано на рисунке. Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе $U_m = 0{,}382$ В. Найти емкость конденсатора в контуре. Ответ запишите в мкФ, с точностью до десятых.



Подсказка 1: Из графика определяем: амплитуду колебаний тока $I_m = 0{,}6$ А и период колебаний $T = 8$ мкс.

Подсказка 2: Максимальные энергии катушки и конденсатора при гармонических колебаниях равны: $\dfrac{LI_m^2}{2} = \dfrac{CU_m^2}{2} \Rightarrow \dfrac{C}{L} = \dfrac{I_m^2}{U_m^2}$.

Подсказка 3: Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Решение:

Из графика определяем: амплитуду колебаний тока $I_m = 0{,}6$ А и период колебаний $T = 8$ мкс. Максимальные энергии катушки и конденсатора при гармонических колебаниях равны: $\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{I_m^2}{U_m^2}$. Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Поэтому $LC = \frac{T^2}{4\pi^2}$.

Перемножая два полученных равенства, находим, что $C = \frac{TI_m}{2\pi U_m} \approx 1{,}0$ мкФ.

Ответ: 1,0.