

11 класс, Экспресс-подготовка к ЕГЭ по физике

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 3.

Темы: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса.

Задача 1 (1 балл) [закон сохранения импульса]

Два тела движутся по взаимно-перпендикулярным пересекающимся прямым. Масса первого тела равна 2 кг, а его скорость равна 3 м/с. Масса второго тела 4 кг, и его скорость равна 2 м/с. Чему будет равна величина импульса системы этих тел после их абсолютно неупругого удара? Ответ запишите в кг·м/с, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: При абсолютно неупругом ударе двух тел их суммарный импульс сохраняется.

Подсказка 2: Модуль суммы двух перпендикулярных векторов можно найти с помощью теоремы Пифагора.

Решение:

При абсолютно неупругом ударе двух тел их суммарный импульс сохраняется, так что $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Модуль суммы двух перпендикулярных векторов можно найти с помощью теоремы Пифагора: $P = \sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2} = 10 \text{ кг}\cdot\text{м/с}$.

Ответ: 10.

Задача 2 (1 балл) [закон сохранения импульса]

Камень массой $m = 6$ кг падает под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали со скоростью $v = 12$ м/с в тележку с песком общей массой $M = 18$ кг, и застревает в песке. До падения камня тележка покоилась на горизонтальных рельсах, а после падения покатила по ним, не подпрыгнув. Найти начальную скорость качения тележки. Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Внешние силы, действующие на систему «тележка+ камень» - сила тяжести и сила реакции рельсов – направлены вертикально.

Подсказка 2: Как видно из условия, вертикальная компонента импульса камня была поглощена при ударе, а горизонтальная перешла в импульс тележки с камнем.

Решение:

Как видно из условия, вертикальная компонента импульса камня была поглощена при ударе, а горизонтальная перешла в импульс тележки с камнем (внешние силы, действующие на систему «тележка + камень» - сила тяжести и сила реакции рельсов – направлены вертикально). Поэтому уравнение закона сохранения горизонтальной компоненты импульса

$$mv\sin(\alpha) = (M + m)V. \text{ Таким образом, искомая скорость } V = \frac{m}{M + m} v\sin(\alpha) = 1,5 \text{ м/с.}$$

Ответ: 1,5.

Задача 3 (1 балл) [потенциальная энергия деформированной пружины]

Ученик исследовал зависимость силы упругости пружины F от величины ее растяжения x и получил следующие результаты:

x , см	0	0,5	1,0	1,5	2,5
F , Н	0	0,04	0,08	0,12	0,20

Найдите потенциальную энергию этой пружины при ее растяжении на 2 см.. Ответ запишите в мДж, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Коэффициент жесткости пружины можно определить по любой из точек с ненулевым растяжением $k = \frac{F}{x}$ – как видно, в пределах точности измерений его величина не зависит от выбора точки.

Решение:

Коэффициент жесткости пружины можно определить по любой из точек с ненулевым растяжением $k = \frac{F}{x} = 8 \text{ Н/м}$ – как видно, в пределах точности измерений его величина не

зависит от выбора точки. Потенциальная энергия пружины $E = \frac{kx^2}{2} = 1,6 \text{ мДж}$.

Ответ: 1,6.

Задача 4 (1 балл) [работа силы, закон изменения кинетической энергии]

Ящик покоился на неподвижной горизонтальной шероховатой поверхности. Его начали тянуть с помощью легкого прочного троса таким образом, что он двигался поступательно, прикладывая горизонтальную силу, которая по величине была в 1,5 раза больше его веса. Какую скорость приобрел ящик к тому моменту, когда пройденный им путь составил 1м? Коэффициент трения ящика о поверхность равен 0,25, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 . Ответ запишите в м/с, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Кинетическая энергия ящика изменяется за счет работы внешних сил – силы натяжения троса, направленной по ходу его движения, и силы трения, направленной против перемещения ящика.

Подсказка 2: Величина силы натяжения троса $F = 1,5 \cdot mg$, а силы трения – $F_{тр} = \mu mg$.

Решение:

Кинетическая энергия ящика изменяется за счет работы внешних сил – силы натяжения троса $F = 1,5 \cdot mg$, направленной по ходу его движения, и силы трения $F_{тр} = \mu mg$,

направленной против перемещения ящика. Значит, $\frac{mv^2}{2} = 1,5 \cdot mgs - \mu mgs$. Из этого

уравнения находим: $v = \sqrt{2(1,5 - \mu)gs} = 5 \text{ м/с}$.

Ответ: 5.

Задача 5 (3 балла) [закон сохранения энергии, закон изменения энергии]

Мальчик на санках скатился с ледяной горки и выехал на горизонтальный снежный участок, по которому до полной остановки саней он проехал расстояние $s = 30 \text{ м}$. Коэффициент трения саней о горизонтальную снежную поверхность $\mu = 0,3$, коэффициент трения саней о наклонную поверхность ледяной горки пренебрежимо мал. С какой высоты скатился мальчик, если его скорость в начале спуска равнялась $v_0 = 4 \text{ м/с}$? Ответ запишите в м, с точностью до десятых. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Подсказка 1: При спуске с высоты h по гладкой горке потенциальная энергия мальчика с санями переходит в кинетическую энергию, которая в начале горизонтального участка равна

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh.$$

Подсказка 2: Далее эта энергия уменьшается до нуля за счет работы силы трения.

Подсказка 3: Поскольку на горизонтальной поверхности величина силы трения скольжения $F_{тр} = \mu mg$, то $A_{тр} = -\mu mg \cdot s$.

Решение:

При спуске с высоты h по гладкой горке потенциальная энергия мальчика с санями переходит в кинетическую энергию, которая в начале горизонтального участка равна

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh.$$

Далее эта энергия уменьшается до нуля за счет работы силы трения. На горизонтальной поверхности величина силы трения скольжения $F_{тр} = \mu mg$, и она всегда

направлена против перемещения, поэтому ее работа $A_{тр} = -\mu mg \cdot s$. Таким образом,

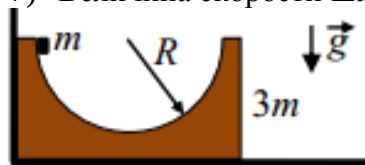
$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh - \mu mgs = 0, \text{ то есть } h = \mu s - \frac{v_0^2}{2g} = 8,2 \text{ м.}$$

Ответ: $h = \mu s - \frac{v_0^2}{2g} = 8,2 \text{ м.}$

Задача 6 (4 балла) [закон сохранения энергии, закон сохранения импульса]

Брусок массы $3m$ с полусферической выемкой радиусом $R = 45 \text{ см}$ сверху покоится в углу между горизонтальным полом и вертикальной стеной. У верхнего края выемки удерживают маленькую шайбу массой m , слегка прижав ее к ближнему к стене участку поверхности выемки. Шайбу отпускают, и она начинает скользить в плоскости, перпендикулярной стене и полу. Нас интересуют величины скоростей шайбы при первом и втором прохождении нижней точки выемки. Выберите все правильные утверждения об этой системе из приведенного списка. Трения полностью отсутствует на всех поверхностях. Движение бруска всегда остается поступательным. Ускорение свободного падения равно $g = 10 \text{ м/с}^2$. В ответе запишите номера правильных утверждений в порядке возрастания, не разделяя их пробелами или знаками препинания.

- 1) При нахождении величины скорости при первом прохождении нижней точки выемки можно использовать закон сохранения импульса системы «шайба + брусок».
- 2) При нахождении величины скорости при первом прохождении нижней точки выемки можно использовать закон сохранения полной механической энергии системы «шайба + брусок».
- 3) Величина скорости шайбы при первом прохождении нижней точки выемки равна 3 м/с .
- 4) Для нахождения величины скорости шайбы при втором прохождении нижней точки выемки (если величина скорости при первом прохождении уже известна) достаточно закон сохранения полной механической энергии системы «шайба + брусок».
- 5) Можно найти величину скорости шайбы при втором прохождении нижней точки выемки (если величина скорости при первом прохождении уже известна), используя совместно закон сохранения горизонтальной проекции импульса системы «шайба + брусок» и закон сохранения полной механической энергии системы «шайба + брусок».
- 6) Величина скорости шайбы при втором прохождении нижней точки выемки равна 3 м/с .
- 7) Величина скорости шайбы при втором прохождении нижней точки выемки равна $1,5 \text{ м/с}$.



Подсказка 1: При спуске шайбы от начала движения до первого прохождения нижней точки выемки давление шайбы прижимает брусок к стене.

Подсказка 2: Диссипативные силы в системе полностью отсутствуют.

Подсказка 3: После того, как шайба в первый раз проходит нижнюю точку выемки, ее давление отрывает брусок от стены, и далее на шайбу действуют только сила тяжести и сила реакции бруска, а на брусок – сила тяжести, сила реакции шайбы и сила реакции пола.

Подсказка 4: При втором прохождении нижней точки выемки шайба движется по направлению к стене.

Решение:

При спуске шайбы от начала движения до первого прохождения нижней точки выемки давление шайбы прижимает брусок к стене. Значит, на брусок действует горизонтальная сила реакции стены, и это единственная внешняя горизонтальная сила для системы «шайба + брусок». Таким образом, эта система не замкнута, и закон сохранения импульса для нее не действует – утверждение 1 **неверно**. Диссипативные силы в системе полностью отсутствуют, а сила тяжести, действующая на тела с стороны Земли, потенциальна. Сила реакции стены

работы не совершает. Поэтому для системы «шайба + брусок» действует закон сохранения полной механической энергии. От начала движения шайбы до первого прохождения нижней точки выемки брусок не движется, потенциальная энергия шайбы в поле тяжести Земли переходит в ее кинетическую энергию, поэтому величина скорости шайбы при первом прохождении нижней точки выемки определяется из уравнения

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgR \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR} = 3 \text{ м/с.}$$

Таким образом, мы нашли эту скорость из ЗСЭ (утверждение 2 **верно**), и она равна 3 м/с (утверждение 3 **верно**). После того, как шайба в первый раз проходит нижнюю точку выемки, ее давление отрывает брусок от стены, и далее на шайбу действуют только сила тяжести и сила реакции бруска, а на брусок – сила тяжести, сила реакции шайбы и сила реакции пола. При втором прохождении нижней точки выемки шайба движется горизонтально уже в обратную сторону (к стене) со скоростью v_2 . Скорость бруска в этот момент направлена от стенки, и она равна V_2 . Так как ЗСЭ по-прежнему действует, и потенциальная энергия тел в поле тяжести Земли не изменилась по сравнению с

моментом первого прохождения, то $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{3mV_2^2}{2} \Rightarrow v_1^2 = v_2^2 + 3V_2^2$. Этого уравнения,

однако, недостаточно для нахождения v_2 – утверждение 4 **неверно**. Однако теперь все внешние силы, действующие на систему «шайба + брусок», вертикальны. Поэтому горизонтальная проекция импульса этой системы сохраняется, и у нас есть еще одно уравнение: $mv_1 = -mv_2 + 3mV_2 \Rightarrow v_2 = 3V_2 - v_1$. Подставляя его в предыдущее уравнение,

находим $V_2 = \frac{v_1}{2}$, и поэтому $v_2 = \frac{v_1}{2} = 1,5 \text{ м/с}$. Итак, утверждения 5 и 7 **верны**, а утверждение

6 **неверно**. Отметим, что на самом деле эта задача – попытка «смоделировать» решение с обоснованием по типу задания 30, и поэтому утверждения были сформулированы так, что целых 4 утверждения оказались верны. В ЕГЭ обычно число верных утверждений (в заданиях на выбор утверждений из списка) не больше трех.

Ответ: 2357.

Задача 7 (3 балла) [закон сохранения импульса]

Снаряд массой $m = 4$ кг, летевший со скоростью $v = 200 \text{ м/с}$, взрывается. При взрыве образовалось два осколка, причем первый полетел под углом 90° к направлению движения снаряда, а второй – под углом 60° к этому направлению. Скорость движения второго осколка сразу после взрыва равнялась $v_2 = 800 \text{ м/с}$. Найдите его массу. Массой пороховых газов пренебречь. Ответ дайте в килограммах.

Подсказка 1: Взрыв происходит очень быстро, внутренние силы значительно превосходят внешние, и поэтому можно считать, что при взрыве сохраняется импульс.

Подсказка 2: Так как массой пороховых газов можно пренебречь, то импульс снаряда до взрыва равен векторной сумме импульсов двух осколков после взрыва.

Подсказка 3: Проекция импульса первого осколка на направление движения снаряда равна нулю.

Решение:

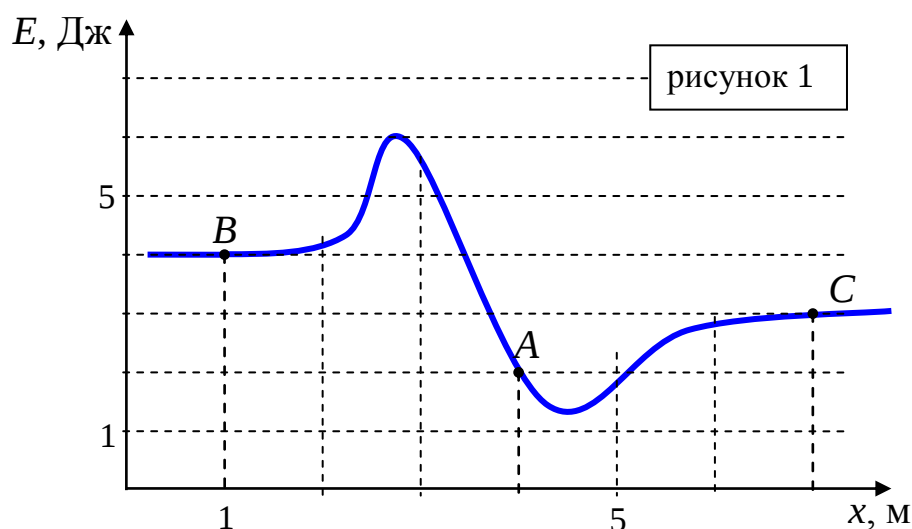
Взрыв происходит очень быстро, внутренние силы значительно превосходят внешние, и поэтому можно считать, что при взрыве сохраняется импульс. Так как массой пороховых газов можно пренебречь, то импульс снаряда до взрыва равен векторной сумме импульсов двух осколков после взрыва. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление движения снаряда (проекция импульса первого осколка на это направление

равна нулю): $mv = m_2 v_2 \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} m_2 v_2$. Значит, $m_2 = \frac{2v}{v_2} m = 2$ кг.

Ответ: 2.

Задача 8 (3 балла) [закон изменения кинетической энергии, потенциальная энергия, сила трения]

Небольшое тело массой $m = 1$ кг совершает прямолинейное поступательное движение под действием потенциальной силы и силы трения. На графике (см. рисунок 1) представлена зависимость потенциальной энергии тела от координаты, отсчитываемой вдоль линии движения (за пределами этого участка потенциальная энергия неизменна). В начальный момент тело находится в точке A и движется со скоростью v . Направление движения определяется в соответствии с рисунком (то есть движение «вправо» - это движение в положительном направлении оси x). Сила трения постоянна по величине и равна $F_{тр} = 1$ Н. Проанализируйте дальнейшее движение тела и выберите все правильные утверждения из приведенных ниже. В качестве ответа напишите подряд номера правильных утверждений (не разделяя пробелами или знаками препинания, например: 13).



- 1) При начале движения влево со скоростью $v = 2,9$ м/с тело не достигнет ни точки В, ни точки С.
- 2) При начале движения влево со скоростью $v = 2,9$ м/с тело попадет в точку В.
- 3) При начале движения вправо со скоростью $v = 2,4$ м/с тело попадет в точку С.
- 4) При начале движения вправо со скоростью $v = 2,9$ м/с тело попадет в точку С.
- 5) При начале движения влево со скоростью $v = 3,8$ м/с тело не достигнет ни точки В, ни точки С.

Таблица для ответа:

--	--

Подсказка 1: убыль полной механической энергии тела обусловлена работой силы трения.

Подсказка 2: поэтому условие попадания из точки 1 в точку 2, между которыми потенциальная энергия меняется **монотонно**, имеет вид:

$$E_K(1) \geq U(2) - U(1) + |F_{тр}| \cdot |x_2 - x_1|.$$

Подсказка 3: если между точками 1 и 2 есть **максимум** функции $U(x)$, то для попадания в точку 2 тело сначала должно пройти точку максимума.

Решение:

При движении тела вправо его потенциальная энергия монотонно растет, а механическая энергия убывает. Убыль полной механической энергии тела обусловлена работой постоянной по величине силы трения, поэтому условие достижения точки С имеет вид:

$\frac{mv_A^2}{2} \geq U(C) - U(A) + |F_{mp}| \cdot |x_A - x_C| = 4 \text{ Дж}$. Отсюда следует, что при старте вправо тело достигнет точки С, если $v_A \geq v_1 \approx 2,83 \text{ м/с}$.

При движении тела влево между точками А и В есть максимум потенциальной энергии, и для достижения точки В тело должно пройти точку максимума, то есть должно выполниться условие $\frac{mv_A^2}{2} \geq U_m - U(A) + |F_{mp}| \cdot |x_m - x_A| \approx 5,3 \text{ Дж}$. Значит, $v_A \geq v_2 \approx 3,26 \text{ м/с}$. Если скорость меньше, то тело может изменить направление своего движения после остановки, но точки С оно все равно не достигнет, так как даже при скатывании из точки максимума запас энергии (3 Дж) будет меньше величины работы силы трения ($|F_{mp}| \cdot |x_m - x_C| \approx 4,3 \text{ Дж}$).

При скорости $v = 3,8 \text{ м/с}$ (начальная кинетическая энергия $\frac{mv_A^2}{2} \approx 7,2 \text{ Дж}$) тело не только пройдет максимум, но и будет иметь в точке максимума кинетическую энергию чуть более 2,5 Дж. Ясно, что этого хватит для попадания в точку В: запас механической энергии 4,5 Дж, а модуль работы силы трения на участке от максимума до В около 1,7 Дж. Итак, **правильные** утверждения – это **1 и 4**, а остальные **неверны**.

Ответ: 14.

Задача 9 (5 баллов) [закон сохранения импульса, изменение механической энергии, сила трения]

Небольшой брусок массы $M = 493 \text{ г}$ покоился на горизонтальной шероховатой поверхности. При этом он был прикреплен к одному из концов легкой длинной пружины жесткостью $k = 25 \text{ Н/м}$. Второй конец пружины закреплен неподвижно, ось пружины проходит через центр масс бруска, пружина находилась в недеформированном состоянии. В брусок врезалась пуля массы $m = 7 \text{ г}$, летевшая горизонтально со скоростью $v_0 = 200 \text{ м/с}$ вдоль оси пружины, и застряла в нем. Какой путь пройдет брусок до остановки? Коэффициент трения между бруском и поверхностью равен $\mu = 0,7$. Ответ запишите в см. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Подсказка 1: при описании взаимодействия пули с бруском можно пренебречь силой трения и считать, что выполняется закон сохранения горизонтальной компоненты импульса и найти из него начальную скорость движения бруска с застрявшей в нем пулей $V_0 = \frac{m}{M+m} v_0$.

Подсказка 2: при скольжении бруска механическая энергия уменьшается за счет работы силы трения, и при этом деформация пружины равна пройденному пути.

Подсказка 3: путь бруска до первой остановки удовлетворяет уравнению

$$s_1^2 + \frac{2\mu(M+m)g}{k} s_1 - \frac{(M+m)V_0^2}{k} = 0.$$

Подсказка 4: после первой остановки сила упругости деформированной пружины $|F_{ypr}| = ks_1 = 7 \text{ Н}$ больше, чем максимальная сила трения покоя $\mu(M+m)g = 3,5 \text{ Н}$, и поэтому брусок после остановки начнет возвратное движение.

Решение:

При описании взаимодействия пули с бруском можно пренебречь силой трения и считать, что выполняется закон сохранения горизонтальной компоненты импульса и найти из него начальную скорость движения бруска с застрявшей в нем пулей:

$$mv_0 = (M+m)V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{m}{M+m} v_0.$$

При скольжении бруска механическая энергия уменьшается за счет работы силы трения, и при этом деформация пружины равна пройденному пути: скорость бруска V после прохождения пути s удовлетворяет соотношению

$\frac{(M+m)V_0^2}{2} - \frac{(M+m)V^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \mu(M+m)gs$. Таким образом, путь до первой остановки бруска ($V=0$) удовлетворяет уравнению

$$s_1^2 + \frac{2\mu(M+m)g}{k}s_1 - \frac{(M+m)V_0^2}{k} = 0.$$

Выбирая физический (положительный) корень, находим:

$$s_1 = -\frac{\mu(M+m)g}{k} + \sqrt{\frac{\mu^2(M+m)^2g^2}{k^2} + \frac{(M+m)V_0^2}{k}} = 0,28 \text{ м.}$$

Проверим, останется ли брусок на месте после остановки: сила упругости деформированной пружины $|F_{\text{упр}}| = ks_1 = 7 \text{ Н}$ больше, чем максимальная сила трения покоя $\mu(M+m)g = 3,5 \text{ Н}$, и поэтому брусок после остановки начнет возвратное движение. Снова записывая закон сохранения энергии для определения точки второй остановки, в которой пружина будет растянута на величину x_2 (а пройденный до остановки путь $s_2 = s_1 + x_2$):

$$\frac{ks_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = \mu(M+m)g(s_1 + x_2) \Rightarrow x_2^2 + \frac{2\mu(M+m)g}{k}x_2 = s_1^2 - \frac{2\mu(M+m)g}{k}s_1 = 0.$$

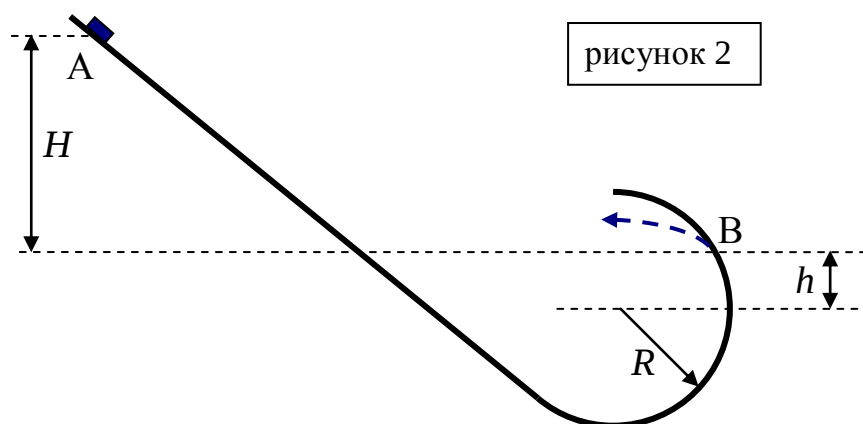
Следовательно, $x_2 = 0$, и поэтому $s_2 = s_1$, и после второй остановки пружина уже не будет деформирована, и брусок окончательно остановится. Поэтому

$$s = 2s_1 = -\frac{2\mu(M+m)g}{k} + 2\sqrt{\frac{\mu^2(M+m)^2g^2}{k^2} + \frac{(M+m)V_0^2}{k}} = 0,56 \text{ м.}$$

Ответ: 56.

Задача 10 (4 балла) [закон сохранения энергии, центростремительное ускорение, отрыв от поверхности]

Тело массой $m = 1 \text{ кг}$ соскальзывает по наклонному желобу, плавно переходящему в закругление радиуса $R = 0,5 \text{ м}$, проходящее в одной вертикальной плоскости с желобом (см. рисунок 2). Поднимаясь по закруглению, тело отрывается от желоба в точке, расположенной на высоте $h = 0,25 \text{ м}$ над центром закругления. Известно, что соскальзывание началось без начальной скорости из точки на высоте $H = 1 \text{ м}$ над точкой отрыва. Найти модуль работы сил трения за все время скольжения тела от начала скольжения до отрыва. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Ответ привести в Джоулях.



Подсказка 1: изменение механической энергии тела на пути от точки старта (А) к точке отрыва (В) обусловлено именно работой сил трения, величину которой надо найти, поэтому:

$$mgH - \frac{mv_B^2}{2} = |A_{\text{тр}}|.$$

Подсказка 2: в точке В сила нормальной реакции поверхности закругления обращается в ноль, и поэтому центростремительная компонента ускорения создается только силой тяжести: $m \frac{v_B^2}{R} = mg \cos \alpha$.

Подсказка 3: должно быть ясно, что α - угол между радиусом закругления, проведенным в точку В, и вертикалью, то есть $\cos \alpha = \frac{h}{R}$.

Решение:

Изменение механической энергии тела на пути от точки старта (А) к точке отрыва (В) обусловлено именно работой сил трения, величину которой надо найти, поэтому:

$mgH - \frac{mv_B^2}{2} = |A_{mp}|$ (в точке А скорость равна нулю, а H - как раз разность высот точек А и В). С другой стороны в точке В сила нормальной реакции поверхности закругления

обращается в ноль, и поэтому центростремительная компонента ускорения создается только силой тяжести: $m \frac{v_B^2}{R} = mg \cos \alpha$, где α - угол между радиусом закругления, проведенным в

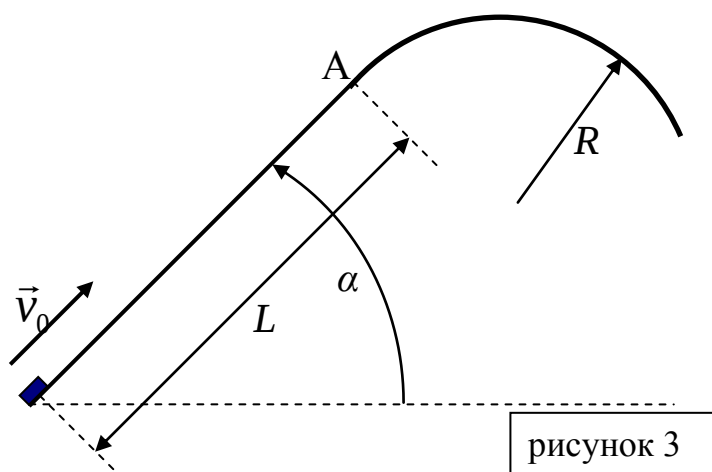
точку В, и вертикалью. Из геометрии ясно, что $\cos \alpha = \frac{h}{R}$. Объединяя эти соотношения,

получим: $|A_{mp}| = mg \left(H - \frac{h}{2} \right) = 8,75 \text{ Дж}$.

Ответ: 8,75.

Задача 11 (4 балла) [закон сохранения энергии, центростремительное ускорение, отрыв от поверхности]

Небольшая шайба после удара скользит вверх по шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^\circ$. В верхней точке А плоскость без излома переходит в внешнюю поверхность горизонтальной трубы радиусом $R = 0,5 \text{ м}$ (рисунок 3). Длина участка наклонной плоскости, пройденная шайбой, составляет $L = 1 \text{ м}$, коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0,1$. Найти величину начальной скорости шайбы v_0 , при превышении которой шайба оторвется от поверхности в точке А. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Ответ записать в м/с, округлив до сотых.



Подсказка 1: убыль механической энергии шайбы при скольжении вверх по плоскости связана с работой силы трения.

Подсказка 2: поэтому ее скорость в точке А $v_A^2 = v_0^2 - 2gL(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$.

Подсказка 3: в точке А центростремительное ускорение шайбы создается разностью нормальной составляющей силы тяжести и силы нормальной реакции поверхности:

$$m \frac{v_A^2}{R} = mg \cos \alpha - N.$$

Решение:

Убыль механической энергии шайбы при скольжении вверх по плоскости связана с работой силы трения: $\frac{mv_A^2}{2} + mgL \sin \alpha - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgL \cos \alpha$. В точке А центростремительное ускорение шайбы создается разностью нормальной составляющей силы тяжести и силы нормальной реакции поверхности: $m \frac{v_A^2}{R} = mg \cos \alpha - N$, поэтому условие отрыва шайбы (обращение N в ноль) требует, чтобы $v_A^2 > gR \cos \alpha$. Выражая v_A^2 из первого уравнения, получим:

$$\begin{aligned} v_A^2 &= v_0^2 - 2gL(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_0 &> \sqrt{g[R \cos \alpha + 2L(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)]} \approx 4,37 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Ответ: 4,37.

Задача 12 (4 балла) [закон сохранения импульса, неупругое соударение, закон сохранения энергии]

Два небольших шарика из пластилина подвешены на нитях одинаковой длины, так, что они слегка касаются друг друга. Один из них (массой m) отвели от вертикали на угол $\alpha = 60^\circ$ и отпустили без начальной скорости. После его лобового удара о другой шарик (массой M) они слиплись и далее двигались вместе. Максимальное отклонение нитей от вертикали при этом оказалось равно $\beta = 45^\circ$. Найти отношение масс шариков $\frac{M}{m} = ?$ Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до десятых. Соппротивлением воздуха пренебречь.

Подсказка 1: закон сохранения энергии для движения первого шара на нити длиной L от отпускания до удара дает: $mgL(1 - \cos \alpha) = \frac{mv^2}{2}$.

Подсказка 2: закон сохранения импульса при неупругом ударе шаров $mv = (m + M)V$.

Подсказка 3: закон сохранения энергии для движения слипшихся шаров от удара до остановки: $\frac{(m + M)V^2}{2} = (m + M)gL(1 - \cos \beta)$.

Решение:

Запишем законы сохранения для разных процессов: закон сохранения энергии для движения первого шара от отпускания до удара: $mgL(1 - \cos \alpha) = \frac{mv^2}{2}$ (здесь L - длина нити, а v - скорость шара перед ударом); закон сохранения импульса при неупругом ударе (закон сохранения механической энергии не работает!): $mv = (m + M)V$; закон сохранения энергии для движения слипшихся шаров от удара до остановки: $\frac{(m + M)V^2}{2} = (m + M)gL(1 - \cos \beta)$.

Исключая скорости из этих соотношений, получаем: $m(1 - \cos \alpha) = (m + M)(1 - \cos \beta)$.

Отсюда выражаем искомую величину: $\frac{M}{m} = \frac{2 - \cos \beta - \cos \alpha}{1 - \cos \beta} = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 1 + 2\sqrt{2} \approx 3,8$.

Ответ: 3,8.

Задача 13 (5 баллов) [закон сохранения импульса, закон сохранения энергии, движение в поле тяжести]

Снаряд, выпущенный из орудия под углом к горизонту над плоским горизонтальным участком земной поверхности, взорвался в верхней точке траектории. При этом образовались два осколка. Первый из них упал на землю спустя время t_1 , которое оказалось ровно в два раза меньше, чем время полета снаряда от выстрела до взрыва, а второй – спустя время t_2 , которое оказалось ровно в два раза больше времени полета. Найти отношение масс осколков. Соппротивлением воздуха и массой пороховых газов пренебречь.

Подсказка 1: время подъема снаряда до верхней точки $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, а высота подъема

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \text{ где } v_0 \text{ и } \alpha - \text{ начальная скорость и угол вылета снаряда.}$$

Подсказка 2: время падения каждого осколка определяется только вертикальной составляющей его скоростей сразу после взрыва u из уравнения $h + ut - \frac{gt^2}{2} = 0$.

Подсказка 3: закон сохранения вертикальной составляющей импульса при взрыве имеет вид $0 = m_1 u_1 + m_2 u_2$.

Решение:

Во время полета от выстрела до взрыва ускорение снаряда было равно ускорению свободного падения, поэтому время подъема снаряда до верхней точки $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, где v_0 и

α - начальная скорость и угол вылета снаряда соответственно. Высота подъема определяется из закона сохранения энергии: поскольку скорость в верхней точке направлена по горизонтали и равна $v_0 \cos \alpha$, то $\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} \Rightarrow h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. Времена падений осколков определяются только вертикальными составляющими их скоростей сразу

после взрыва u (ускорения осколков одинаковы и равны g): $h + ut - \frac{gt^2}{2} = 0$. Из этого

уравнения находим его положительный корень: $t = \frac{u}{g} + \sqrt{\frac{u^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$. Значит, по заданным

временам можно найти вертикальные составляющие скоростей осколков сразу после взрыва

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{u_1}{g} + \sqrt{\frac{u_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = \frac{t}{2} \\ t_2 = \frac{u_2}{g} + \sqrt{\frac{u_2^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = 2t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\frac{3}{4}gt = -\frac{3}{4}v_0 \sin \alpha \\ u_2 = +\frac{3}{4}gt = +\frac{3}{4}v_0 \sin \alpha \end{array} \right.$$

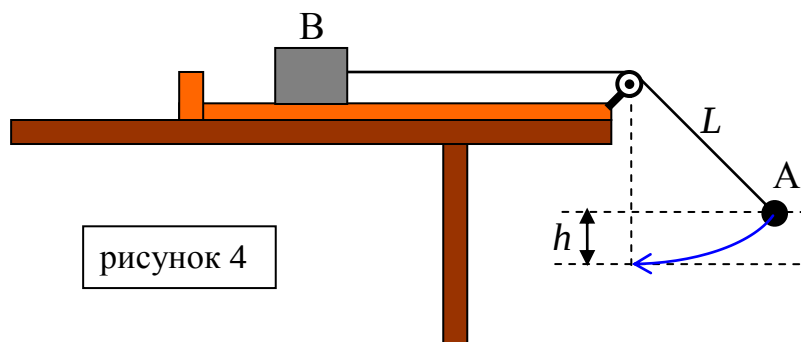
Как видно, они в точности противоположны друг другу. Из закона сохранения вертикальной составляющей импульса при взрыве: $0 = m_1 u_1 + m_2 u_2$ найдем, что $\frac{m_1}{m_2} = -\frac{u_2}{u_1} = 1$.

Ответ: 1.

Задача 14 (4 балла) [закон сохранения энергии, движение в поле тяжести, центростремительное ускорение, сила трения]

В установке, изображенной на рисунке 4, груз А соединен легкой нерастяжимой нитью с бруском В, масса которого в два раза больше массы груза: $M = 2m$. Брусок лежит на горизонтальной поверхности трибометра, закрепленного на столе, а длина свисающей части нити равна L . Груз отводят в сторону, приподнимая его на высоту h так, что нить слегка натянута, а затем отпускают. Оказалось, что минимальная величина высоты подъема, при которой брусок сдвинется с места при прохождении грузом нижней точки траектории, соответствует $h = \frac{L}{4}$. Определите величину коэффициента трения между бруском и

поверхностью трибометра. Трением в блоке, а также размерами блока пренебречь. Ответ приведите в виде десятичной дроби.



Подсказка 1: Скорость v , которую набирает груз, можно определить из закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gh.$$

Подсказка 2: Центробежное ускорение груза в нижней точке траектории создается разностью сил натяжения нити и силы тяжести:

$$m \frac{v^2}{L} = T - mg.$$

Подсказка 3: Сила натяжения нити является силой, сдвигающей брусок, поэтому ее величина в момент прохождения грузом нижней точки траектории при минимальной высоте, обеспечивающей начало скольжения, соответствует максимальной величине силы трения покоя бруска о поверхность.

Решение:

Так как до достижения грузом нижней точки траектории брусок не движется, то груз движется практически по окружности радиуса L , набирая скорость v , величину которой

можно определить из закона сохранения энергии: $mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gh.$

Центробежное ускорение груза в нижней точке траектории создается разностью сил

натяжения нити и силы тяжести: $m \frac{v^2}{L} = T - mg$. Поэтому сила натяжения нити в момент

прохождения грузом нижней точки траектории $T = mg \left(1 + \frac{2h}{L} \right)$. Эта же сила сдвигает брусок,

поэтому ее величина при минимальной высоте, обеспечивающей начало скольжения, соответствует максимальной величине силы трения покоя: $mg \left(1 + \frac{2h}{L} \right) = \mu Mg$. Таким

образом, $\mu = \frac{3m}{2M} = 0,75$.

Ответ:: 0,75.