**10-11 классы, подготовка к теоретическому туру**

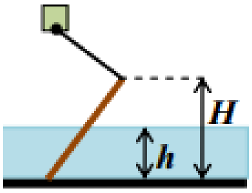
**олимпиады школьников «Робофест» по физике**

**Задачи к итоговому занятию основного курса 2021/22 учебного года.**

**Тема: «ПОДГОТОВКА К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ ТУРУ ФИНАЛЬНОГО ЭТАПА».**

**Задание 1.1.**

Массивный однородный стержень верхним концом прикрепили к легкому прочному тросу (другой конец троса закреплен неподвижно). При этом нижним концом стержень опирался на пол бассейна, трос был перпендикулярен стержню, а верхний конец стержня находился на высоте $H = 0{,}9$ м. Трос оказался натянут с силой $T_0 = 80$ Н. Какой станет сила натяжения троса, если бассейн заполнить водой до глубины $h = 0{,}45$ м? Плотность материала стержня в два раза больше плотности воды, нижний конец стержня по дну бассейна не скользит. Запишите ответ в Н с точностью до целого значения.

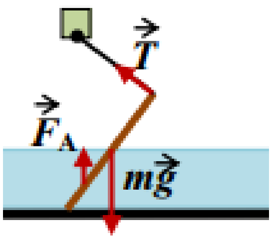



Подсказка 1: Удобно каждый раз записывать уравнение правила моментов относительно точки опоры стержня – тогда сила реакции дна не входит в уравнение. Например, в отсутствие воды $T_0 L - mgl = 0 \Rightarrow T_0 = \frac{l}{L} mg$, где $l$ – расстоянию от точки опоры до проекции середины стержня на дно.

Подсказка 2: После появления воды к прежним силам добавилась сила Архимеда, величина которой $F_A = \frac{h}{2H} mg$, а плечо $l_A = \frac{h}{H} l$.

Решение:

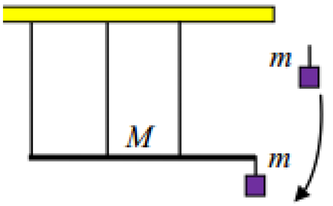
Пока воды не было, на стержень действовали сила натяжения троса, сила тяжести и сила реакция дна. Плечо силы натяжения относительно точки опоры равно длине стержня $L$, а плечо силы тяжести – расстоянию от точки опоры до проекции середины стержня на дно (обозначим его $l$). Запишем правило рычага: $T_0 L - mgl = 0 \Rightarrow T_0 = \frac{l}{L} mg$. После появления воды к этим силам добавилась сила Архимеда. Ясно, что объем погруженной части стержня составляет часть $\frac{h}{H}$ от общего объема. С учетом соотношения плотностей ясно, что величина силы Архимеда равна $F_A = \frac{h}{2H} mg$. Кроме того, ее плечо $l_A = \frac{h}{H} l$. Запишем правило рычага для стержня относительно точки опоры в присутствии воды: $TL + F_A l_A - mgl = 0 \Rightarrow T = \frac{l}{L} mg \left(1 - \frac{h^2}{2H^2}\right) = T_0 \left(1 - \frac{h^2}{2H^2}\right) = 70$ Н.



ОТВЕТ: 70.

**Задание 1.2**

Однородный стержень массой $M=1$кг подвешен на трех одинаковых длинных легких практически нерастяжимых нитях таким образом, что все три нити вертикальны. При этом одна из нитей прикреплена к «левому» концу стержня, другая – к точке, расположенной на расстоянии, равном трети длины стержня от этого конца, а третья – на таком же расстоянии от второй (см. рисунок). К выступающему «правому» концу стержня прикреплен небольшой по размеру груз массой $m=110$г. Как и на сколько изменится сила натяжения «средней» нити, если к грузу подвесить еще один, точно такой же? В ответе запишите величину изменения в Н, с точностью до десятых. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$м/с$^2$. Считать, что деформации стержня и потолка еще во много раз меньше деформаций нитей.




Подсказка 1: Условия равновесия стержня – это условие равенства нулю суммы действующих на него сил и условие равенства нулю суммы моментов этих сил (например, относительно левого конца стержня): $T_2\frac{l}{3}+T_3\frac{2l}{3}=Mg\frac{l}{2}+mgl \Rightarrow T_2+2T_3=\frac{3}{2}Mg+3mg$. Но этих уравнений не хватает для однозначного определения сил натяжения нитей.

Подсказка 2: Силы упругости нитей пропорциональны их деформациям, которые малы, но все же отличны от нуля, и заметно больше деформаций стержня и потолка. Так как вторая нить находится точно посередине между первой и третьей, то ее деформация есть точно полусумма деформаций этих нитей.

Подсказка 3: В каждом случае необходимо не только найти величину $T_2$, но и проверить, действительно ли <u>все три</u> нити натянуты.

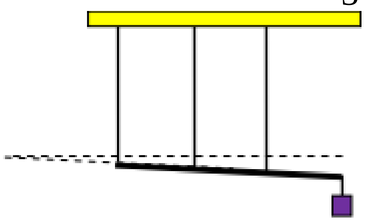
Решение:

На стержень действуют силы натяжения нитей $T_{1,2,3}$, сила тяжести (приложенная к его середине, так как стержень однородный) и вес груза. Условия равновесия стержня – это условие равенства нулю суммы действующих на него сил, то есть $T_1+T_2+T_3=(M+m)g$, и условие равенства нулю суммы моментов этих сил (например, относительно левого конца стержня): $T_2\frac{l}{3}+T_3\frac{2l}{3}=Mg\frac{l}{2}+mgl \Rightarrow T_2+2T_3=\frac{3}{2}Mg+3mg$. Этих уравнений не хватает для однозначного определения сил натяжения нитей. Если дополнительно *предположить*, что все три нити натянуты, то можно получить еще одно уравнение. Силы упругости нитей пропорциональны их деформациям, которые малы, но все же отличны от нуля. Поскольку деформации стержня и потолка еще во много раз меньше, то деформации нитей – это отрезки трех параллельных прямых между сторонами одного угла. Так как вторая нить находится точно посередине между первой и третьей, то ее деформация есть точно полусумма деформаций этих нитей, или $2x_2=x_1+x_3$ (см. рисунок, на котором для наглядности деформации показаны увеличенными). Нити по условию одинаковы, поэтому коэффициенты жесткости у них также одинаковы, и поэтому $2T_2=T_1+T_3$. Из этого уравнения и условия равновесия сил сразу получается, что $3T_2=(M+m)g$. Таким образом, <u>если</u> все три нити натянуты, то $T_2=\frac{M+m}{3}g \approx 3{,}7$ Н (если считать, что $g \approx 10$ м/с$^2$). Проверим выполнение предположения: из правила моментов следует, что

$T_3 = \frac{3}{4}Mg + \frac{3}{2}mg - \frac{1}{2}T_2 = \frac{7}{12}Mg + \frac{4}{3}mg$, и поэтому при любых массах стержнях и груза третья нить натянута ($T_3 > 0$). Сила натяжения первой нити $T_1 = (M+m)g - T_2 - T_3$, то есть $T_1 = \frac{M-8m}{12}g$. Значит, первая нить натянута при $m < \frac{M}{8}$, и это условие выполняется в случае подвешивания одного груза. После подвешивания второго груза в этих формулах нужно заменить $m \to 2m$, но при этом оказывается, что полученными формулами пользоваться нельзя, так как $2m > \frac{M}{8}$! Таким образом, после подвешивания второго груза первая нить провисает ($T_1 = 0$), и теперь

$$\left\{\begin{array}{l} T_2 + T_3 = (M+2m)g \\ T_2 + 2T_3 = \frac{3}{2}Mg + 6mg \end{array}\right\} \Rightarrow T_2 = \frac{M-4m}{2}g \approx 2{,}8\,\text{Н}.$$

Как видно, в результате подвешивания второго груза сила натяжения «средней» нити уменьшится на $\Delta T_2 = \frac{M+m}{3}g - \frac{M-4m}{2}g = \frac{14m-M}{6}g \approx 0{,}9\,\text{Н}$.



ОТВЕТ: 0,9.

**Задание 2.1**

Диаграмму циклического процесса над идеальным газом в координатах *p*-*V* подвергли «масштабному преобразованию»: давление и объем в каждой точке изменили в одно и то же количество раз ($p \to kp$ и $V \to kV$), где $k = 2$. Чему равно отношение КПД «нового» и «старого» циклов? Ответ запишите в виде числа, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: При описанном масштабном преобразовании все работы (вычисляемые как площади под диаграммами процессов $p(V)$) изменятся пропорционально квадрату «масштабного» коэффициента: $A \to k^2 A$.

Подсказка 2: То же самое происходит и с значениями внутренней энергии (которые для идеального газа пропорциональны произведению давления на объем) $U \to k^2 U$.

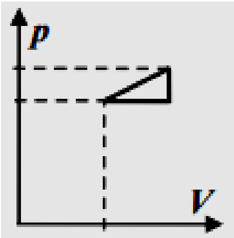
Решение:

При описанном масштабном преобразовании все работы (вычисляемые как площади под диаграммами процессов $p(V)$) и внутренние энергии (которые для идеального газа пропорциональны произведению давления на объем) изменятся пропорционально квадрату «масштабного» коэффициента: $A \to k^2 A$ и $U \to k^2 U$. Такой же вывод, в соответствии с I Началом термодинамики, относится и к количествам теплоты ($Q \to k^2 Q$). Поэтому КПД циклов не изменяются, и искомое соотношение равно 1.

ОТВЕТ: 1.

**Задание 2.2**

Рабочим телом тепловой машины является постоянное количество одноатомного идеального газа. Цикл рабочего тела в координатах давление-объем имеет вид прямоугольного треугольника (см. рисунок), причем минимальное давление, максимальное давление и минимальный объем газа в этом цикле зафиксированы, а максимальный объем можно изменять. Оказалось, что при $V_{\max} = V_1 = 120$л КПД цикла равно 5%, а при $V_{\max} = V_2 = 170$л КПД увеличивается до 6%. Каким станет КПД цикла при $V_{\max} = V_3 = 200$л? Ответ записать в процентах, с точностью до сотых.




Подсказка 1: Работа в этом цикле $A = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}(V_{\max} - V_{\min})$, и теплота поступает к газу от нагревателя в процессе, в котором давление линейно растет с ростом объема.

Подсказка 2: Количество теплоты, полученное газом от нагревателя в этом процессе $Q_H = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}(V_{\max} - V_{\min}) + \frac{3}{2}(p_{\max}V_{\max} - p_{\min}V_{\min})$.

Подсказка 3: формулу для КПД цикла можно переписать в виде $\frac{1}{\eta} = a + \frac{3V_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}}$, где $a \equiv \frac{4p_{\max} + p_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}$.

Решение:

Пусть минимальный объем газа в цикле – это $V_0$, а минимальное давление $p_0$. Максимальный объем обозначим $x \cdot V_0$, а максимальное давление $y \cdot p_0$. Тогда работа газа в цикле равна его площади $A = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}(V_{\max} - V_{\min}) = p_0 V_0 \frac{(x-1)(y-1)}{2}$. Теплота поступает к газу от нагревателя в процессе, в котором давление линейно растет с ростом объема. Согласно I Началу термодинамики, количество теплоты, полученное газом от нагревателя в этом процессе $Q_H = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}(V_{\max} - V_{\min}) + \frac{3}{2}(p_{\max}V_{\max} - p_{\min}V_{\min})$, то есть $Q_H = p_0 V_0 \frac{(y+1)(x-1) + 3(yx-1)}{2}$. Здесь мы учли, что внутренняя энергия одноатомного идеального газа через давление и объем выражаются как $U = \frac{3}{2}pV$. Таким образом, КПД цикла определяется выражением $\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{(y-1)(x-1)}{(y+1)(x-1) + 3(yx-1)}$. Полезно обратить внимание, что его можно переписать в виде $\eta = \frac{(y-1)(x-1)}{(4y+1)(x-1) + 3(y-1)}$, откуда заметно, что $\frac{1}{\eta} = \frac{4y+1}{y-1} + \frac{3}{x-1} = a + \frac{3V_0}{V_{\max} - V_0}$. Как видно, здесь величина $a \equiv \frac{4y+1}{y-1} = \frac{4p_{\max} + p_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}$

постоянна для всех циклов. Используя два известных значения КПД, получаем уравнение на $V_0$:

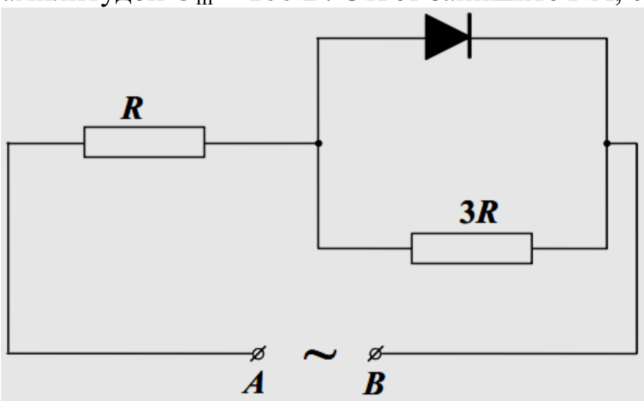
$$\begin{cases} 20 = a + \dfrac{3V_0}{V_1 - V_0} \\ \dfrac{50}{3} = a + \dfrac{3V_0}{V_2 - V_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{3V_0(V_2 - V_1)}{(V_2 - V_0)(V_1 - V_0)}.$$

Подставляя численные значения объемов, приходим к уравнению $V_0^2 - 335\text{л} \cdot V_0 + 20400\text{л}^2 = 0$, меньший корень которого $V_0 = 80$ л (больший корень 255 л не подходит – он больше $V_1$ и $V_2$). С учетом этого из любого из уравнений находим $a = 14$. Таким образом, $\dfrac{1}{\eta} = 14 + \dfrac{240\text{ л}}{V_{max} - 80\text{л}}$. Тогда для $V_{max} = V_3 = 200$ л получаем, что $\eta = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625$, или 6,25 %.

ОТВЕТ: 6,25.

**Задание 3.1**

Найдите действующее значение силы тока в резисторе с сопротивлением $R$ = 50 Ом в схеме, показанной на рисунке, на вход АВ которой подается синусоидальное напряжение с амплитудой $U_m$ = 100 В. Ответ запишите в А, с точностью до сотых.




Подсказка 1: В ту половину периода $T$ синусоидального напряжения, когда потенциал А выше потенциала В, диода открыт, и резистор с сопротивлением $3R$ закорочен. Поэтому амплитуда синусоидального тока через резистор $R$ равна $\dfrac{U_m}{R}$.

Подсказка 2: Выделившееся за эту половину периода количество теплоты $Q_I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{U_m}{R}\right)^2 R\dfrac{T}{2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{U_m^2 T}{R}$ (здесь множитель ½ появляется из-за усреднения квадрата гармонической функции).

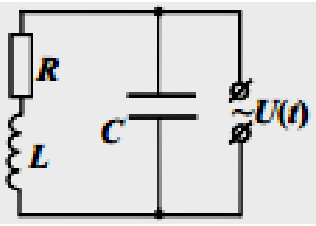
Решение:

В ту половину периода $T$ синусоидального напряжения, когда потенциал А выше потенциала В, диода открыт, и резистор с сопротивлением $3R$ закорочен. Поэтому амплитуда синусоидального тока через резистор $R$ равна $\dfrac{U_m}{R}$. Выделившееся за эту половину периода количество теплоты $Q_I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{U_m}{R}\right)^2 R\dfrac{T}{2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{U_m^2 T}{R}$ (здесь множитель ½ появляется из-за усреднения квадрата гармонической функции). При запертом диоде через этот резистор течет ток (вторая «половинка синусоиды») с амплитудой $\frac{U_m}{4R}$, и в резисторе $R$ выделяется количество теплоты $Q_{II} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_m}{4R}\right)^2 R\frac{T}{2} = \frac{1}{64}\frac{U_m^2 T}{R}$. Полное количество теплоты, выделившееся за период в резисторе $R$ равно $Q = Q_I + Q_{II} = \frac{17}{64}\frac{U_m^2 T}{R}$, и по определению действующего значения силы тока $I_a^2 RT = \frac{17}{64}\frac{U_m^2 T}{R}$, то есть $I_a = \frac{\sqrt{17}}{8}\frac{U_m}{R} \approx 1{,}03$А.

ОТВЕТ: 1,03.

**Задание 3.2**

Схема из конденсатора с емкостью *C*, катушки с индуктивностью *L* и омическим сопротивлением *R* = 10 Ом подключена к источнику синусоидального напряжения с амплитудой $U_m$ = 160 В. Известно, что циклическая частота внешнего напряжения в точности равна $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Кроме того, параметры схемы связаны соотношением $\sqrt{\frac{L}{C}} = R$. Найдите амплитуду общего тока (в ветви с источником). Ответ запишите в амперах, с точностью до десятых.




Подсказка 1: Ток через индуктивность и сопротивление $I_{RL}$ – общий, причем напряжение на резисторе колеблется синфазно с током, а напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому на фазовой диаграмме вектора, отвечающие колебаниям этих напряжений, взаимно перпендикулярны.

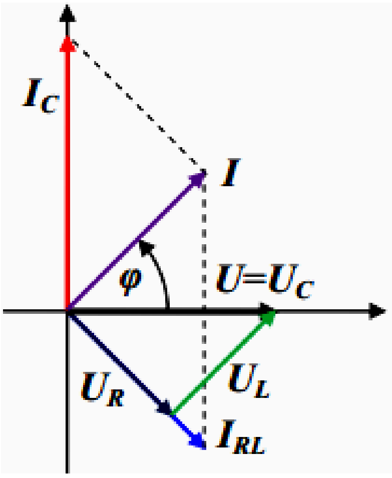
Подсказка 2: Сумма напряжений на индуктивности и сопротивлении равна напряжению источника. При этом при заданных соотношений для частоты и параметров схемы амплитуды этих напряжений равны: $U_{Rm} = R \cdot I_{RLm}$, а $U_{Lm} = \omega L \cdot I_{RLm} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_{RLm} = R \cdot I_{RLm}$.

Подсказка 3:Напряжение на конденсаторе равно напряжению источника, а ток через него опережает напряжение по фазе на $\frac{\pi}{2}$, и амплитуда колебаний силы тока $I_{Cm} = \omega C \cdot U_m = \sqrt{\frac{C}{L}} U_m = \frac{U_m}{R}$.

Решение:

В данной схеме неидеальную катушку можно рассматривать как последовательно соединенные идеальную индуктивность и резистор. Ток через них – общий, причем напряжение на резисторе колеблется синфазно с током, а напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому на фазовой диаграмме вектора, отвечающие колебаниям этих напряжений, взаимно перпендикулярны. Однако сумма этих напряжений в любой момент равна напряжению источника, а амплитуды их колебаний равны! В самом деле, если $I_{RLm}$ – амплитуда колебаний их общего тока, то $U_{Rm} = R \cdot I_{RLm}$, а $U_{Lm} = \omega L \cdot I_{RLm} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_{RLm} = R \cdot I_{RLm}$, в соответствии с заданными значениями частоты и параметров схемы. Значит, треугольник векторов, отвечающих колебаниям напряжений – прямоугольный равнобедренный (см. рисунок). Из фазовой диаграммы видно, что $U_{Rm} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ и поэтому $I_{RLm} = \frac{U_m}{R\sqrt{2}}$. При этом ток $I_{RL}$ отстает от входного напряжения по фазе на $\frac{\pi}{4}$.

С другой стороны, напряжение на конденсаторе равно напряжению источника. Ток через конденсатор опережает напряжение по фазе на $\frac{\pi}{2}$, и амплитуда колебаний силы тока $I_{Cm} = \omega C \cdot U_m = \sqrt{\frac{C}{L}} U_m = \frac{U_m}{R}$. Складывая колебания токов через ветви, получаем колебания общего тока схемы. Как нетрудно видеть из фазовой диаграммы, амплитуда силы этого тока в точности равна $I_m = I_{RLm} = \frac{U_m}{R\sqrt{2}} \approx 11{,}3$А. Также можно отметить (хотя это и не спрашивалось в задаче), что сдвиг фаз между этим током и входным напряжением равен $\varphi = +\frac{\pi}{4}$.




ОТВЕТ: 11,3.

**Задание 4.1**

Робот оснащен датчиком освещенности, который измеряет световую энергию, попадающую в маленькое «входное окно» датчика. Сила тока фотодатчика прямо пропорциональна мощности поступающего в «окно» излучения. Пусть источником света является светящаяся цилиндрическая колонна, испускающая свет равномерно во все стороны по горизонтали на любой высоте. Когда робот находится у самой колонны, сила тока фотодатчика равна 6 мА (миллиампера). Когда робот отъехал на расстояние 2 м от колонны, сила тока стала равна 3 мА. Какой будет сила тока датчика, когда робот будет находиться на расстоянии 4 м от колонны? Ответ запишите в мА, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: По мере удаления от колонны площадь цилиндрической поверхности, по которой распределена энергия излучения растет пропорционально расстоянию от оси колонны.

Подсказка 2: Убывание сигнала датчика в два раза при удалении на 2 м от колонны означает, что первоначальное расстояние от оси составляло как раз 2 м.

Решение:

По мере удаления от колонны площадь цилиндрической поверхности, по которой распределена энергия излучения растет пропорционально расстоянию от оси колонны. Поэтому мощность излучения лампочки, регистрируемая на расстоянии $r$ от нее, убывает обратно пропорционально $r$. Убывание сигнала датчика в два раза при удалении на 2 м от колонны означает, что первоначальное расстояние от оси составляло как раз 2 м, так что при удалении еще на 2 метра робот окажется на расстоянии 6 м от оси колонны, и сигнал фотодатчика будет равен 6мА:3=2мА.

ОТВЕТ: 2.

**Задание 4.2**

Световое излучение – это разновидность *электромагнитных волн*, причем разные цвета отличаются друг от друга *длиной волны* $\lambda$ (это расстояние между двумя «гребнями» волны). В таблице ниже приведена связь между длиной волны в нанометрах (1 нм = $10^{-9}$м) и видимым цветом:

| красный | оранжевый | желтый | зеленый | голубой | синий | фиолетовый |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 625–740 нм | 590-625 нм | 565-590 нм | 500-565 нм | 485-500 нм | 440-485 нм | 380-440 нм |

«Белый цвет» - это равномерная смесь всех этих цветов, то есть в»белом» световом пучке во всем диапазоне длин волн от 380 нм до 740 нм на одинаковые интервалы ее значений $\Delta\lambda$ приходятся одинаковые доли от общей *интенсивности* пучка $I$ (так называют энергию светового излучения, проходящую за единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка). Пусть белый свет падает на поверхность зеркала, которую мы разглядываем через «синий» светофильтр (то есть этот светофильтр пропускает «синие» световые лучи с эффективностью, описываемой коэффициентом прохождения $T(\lambda)=\dfrac{320\text{нм}}{\lambda}$, а все остальные полностью поглощает или отражает). Известно, что коэффициент отражения зеркала (показывающий, какую долю падающей энергии отражает зеркало для данной длины волны) $R(\lambda)=\dfrac{\lambda}{800\text{нм}}$. Определите, какую часть от интенсивности падающего на зеркало света составляет интенсивность света, прошедшего светофильтр. Ответ запишите в процентах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: На каждый «малый» интервал длин волн $\Delta\lambda$ приходится часть общей интенсивности падающего пучка $\Delta I=\dfrac{\Delta\lambda}{360\text{нм}}I_0$ (здесь 360 нм – ширина диапазона «видимого» света 740 нм – 380 нм).

Подсказка 2: После отражения от зеркала эта часть еще уменьшается и становится равной $\Delta I'=R(\lambda)\cdot\Delta I=\dfrac{\lambda}{800\text{нм}}\dfrac{\Delta\lambda}{360\text{нм}}I_0$.

Подсказка 3: Интенсивность после прохождения светофильтра еще уменьшается: $\Delta I''=T(\lambda)\Delta I'=\dfrac{320\text{нм}}{\lambda}\dfrac{\lambda}{800\text{нм}}\dfrac{\Delta\lambda}{360\text{нм}}I_0=\dfrac{\Delta\lambda}{900\text{нм}}I_0$, причем это выражение теперь относится только к «синим» лучам.

Решение:

Пусть интенсивность падающего «белого» света равна $I_0$. Тогда на каждый «малый» интервал длин волн $\Delta\lambda$ приходится часть общей интенсивности $\Delta I = \frac{\Delta\lambda}{360\text{нм}} I_0$ (здесь 360 нм – ширина диапазона «видимого» света 740 нм – 380 нм). После отражения от зеркала эта часть еще уменьшается и становится равной $\Delta I' = R(\lambda)\cdot\Delta I = \frac{\lambda}{800\text{нм}}\frac{\Delta\lambda}{360\text{нм}} I_0$. Интенсивность после прохождения светофильтра еще уменьшается: $\Delta I'' = T(\lambda)\Delta I' = \frac{320\text{нм}}{\lambda}\frac{\lambda}{800\text{нм}}\frac{\Delta\lambda}{360\text{нм}} I_0 = \frac{\Delta\lambda}{900\text{нм}} I_0$, причем это выражение теперь относится только к «синим» лучам в диапазоне от 440 нм до 485 нм (шириной 45 нм), так как остальные лучи через светофильтр совсем не проходят. Значит, общая интенсивность пучка на выходе из светофильтра $I'' = \frac{45\text{нм}}{900\text{нм}} I_0 = \frac{1}{20} I_0$. Итак, его интенсивность составляет 5% от первоначальной.

ОТВЕТ: 5.