10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задание для подготовки к теоретическому туру финального этапа.

Задание 1.1

Цилиндрическая труба радиуса $r = 20\,\text{см}$ катится без проскальзывания по ровной горизонтальной поверхности. Ось трубы движется относительно поверхности с постоянной скоростью $v = 1\,\text{м/с}$. С какой угловой скоростью вращается труба вокруг своей оси? Ответ записать в радианах в секунду с точностью до целого значения.

Подсказка 1: при качении без проскальзывания скорость точек трубы, соприкасающихся с поверхностью, равна нулю (относительно поверхности).

Подсказка 2: эта скорость складывается из противоположно направленных скоростей: скорости оси трубы v и скорости вращения этих точек вокруг оси трубы ωr .

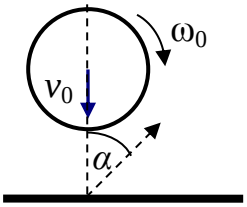
Решение:

При качении без проскальзывания скорость точек трубы, соприкасающихся с поверхностью, равна нулю (относительно поверхности). Вместе с тем эта скорость складывается из противоположно направленных скоростей: скорости оси трубы v и скорости вращения этих точек вокруг оси трубы ωr . Так как их векторная сумма равна нулю, то по величине они равны: $v = \omega r$, и поэтому $\omega = \dfrac{v}{r} = 5\,\text{рад/с}$.

ОТВЕТ: 5.

Задание 1.2

Отрезок тонкостенной цилиндрической трубы радиусом $r = 5\,\text{см}$ падает вертикально на горизонтальную поверхность (см. рисунок). Перед ударом скорость оси трубы равнялась $v_0 = 0{,}25\,\text{м/с}$. Кроме того, перед ударом труба вращалась вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_0 = 10\,\text{рад/с}$. Под каким углом к вертикали будет двигаться ось трубы после удара? Удар считать «мгновенным», а деформации поверхности – упругими (то есть в отсутствие вращения удар был бы упругим, и труба отразилась бы вертикально вверх). Но при этом поверхность – шероховатая. Коэффициент трения между трубой и поверхностью равен $\mu = 0{,}6$. Ответ записать в градусах, при необходимости округлив до целого значения.



Подсказка 1: действие силы нормальной реакции совпадает с ее действием при упругом ударе, поэтому проекция скорости оси трубы на вертикальную ось y просто меняет знак, и изменение импульса трубы в проекции на эту ось $mv_y - (-mv_0) = 2mv_0 = N\Delta t$, где $\vec{v}$ - скорость центра масс трубы после удара, а Δt - малое время удара..

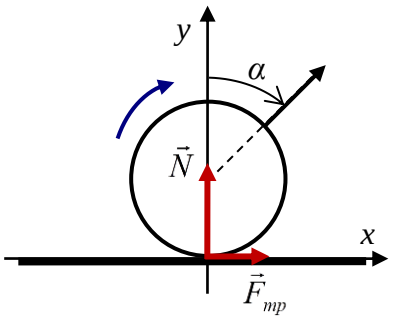
Подсказка 2: <u>если</u> в процессе удара силы трения не успевают остановить проскальзывание, то в течение всего времени Δt сила трения $F_{тр} = \mu N$, и изменение импульса трубы в проекции на горизонтальную ось x равно $mv_x = \mu N\Delta t = 2\mu mv_0$.

Подсказка 3: та же сила трения тормозит вращательное движение кольца одновременно с торможением проскальзывания, поэтому изменение угловой скорости определяется из соотношения $m\omega r - m\omega_0 r = -\mu N\Delta t = -2\mu m v_0$.

Подсказка 4: проскальзывание прекращается при выравнивании линейной скорости вращения и скорости движения оси трубы: $v_x = \omega r = \omega_0 r - v_x \Rightarrow v_x = \frac{\omega_0 r}{2} \Rightarrow 2\mu = \frac{\omega_0 r}{2v_0}$. Но в нашем случае $2\mu = 1{,}2 > \frac{\omega_0 r}{2v_0} = 1$, то есть на самом деле проскальзывание прекратится раньше, чем завершится соударение!

Решение:

Рассмотрим взаимодействие трубы с поверхностью. На трубу будут действовать силы нормальной реакции поверхности и сила трения скольжения (в момент касания у из-за вращения труба обязательно будет проскальзывать по поверхности). По условию, действие силы нормальной реакции совпадает с ее действием при упругом ударе, поэтому проекция скорости оси трубы на ось y просто меняет знак, и изменение импульса трубы в проекции на ось y $mv_y - (-mv_0) = 2mv_0 = N\Delta t$, где $\vec{v}$ - скорость центра масс трубы после удара, а Δt - малое время удара. Тут возможны две ситуации. Если в процессе удара силы трения не успевают остановить проскальзывание, то в течение всего времени Δt сила трения $F_{тр} = \mu N$, и изменение импульса трубы в проекции на ось x равно $mv_x = \mu N\Delta t = 2\mu m v_0$. Кроме того, та же сила трения тормозит вращательное движение кольца одновременно с торможением проскальзывания. Изменение линейной скорости вращательного движения в этом случае можно найти из соотношения $m\omega r - m\omega_0 r = -\mu N\Delta t = -2\mu m v_0$. Из этих соотношений следует, что $v_x = 2\mu v_0$, а $\omega = \omega_0 - 2\mu v_0 / r$. Проскальзывание прекращается при выравнивании линейной скорости вращения и скорости движения оси трубы: $v_x = \omega r = \omega_0 r - v_x \Rightarrow v_x = \frac{\omega_0 r}{2} \Rightarrow 2\mu = \frac{\omega_0 r}{2v_0}$. Но в нашем случае $2\mu = 1{,}2 > \frac{\omega_0 r}{2v_0} = 1$! Поэтому на самом деле проскальзывание прекратится раньше, чем завершится соударение (некоторые из соотношений неверны – например, теперь $mv_x = \mu N\Delta t' < \mu N\Delta t = 2\mu m v_0$, где $\Delta t'$ – время скольжения). Это значит, что $v_x < 2\mu v_0$, но условие прекращения проскальзывания выполняется, то есть $v_x = \frac{\omega_0 r}{2}$. Теперь понятно, что $tg(\alpha) = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\omega_0 r}{2v_0} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$.



ОТВЕТ: 45.

Задание 2.1

Двигатель холодильной установки за один цикл работы совершает над рабочим телом работу A, а в окружающую среду за то же время рабочее тело отдает количество теплоты $Q_H = 5A$.

Найдите холодильный коэффициент установки. Ответ запишите в процентах с точностью до целого значения.

Подсказка 1: холодильный коэффициент есть отношение $k = \frac{Q_X}{A}$.

Подсказка 2: условие энергетического баланса $Q_H = Q_X + A$.

Решение:

По определению холодильный коэффициент есть отношение $k \equiv \frac{Q_X}{A}$, где Q_X – количество теплоты, отнятое за цикл рабочим телом у содержимого холодильника. Условие энергетического баланса $Q_H = Q_X + A \Rightarrow k = \frac{5A - A}{A} = 400\%$.

ОТВЕТ: 400.

Задание 2.2

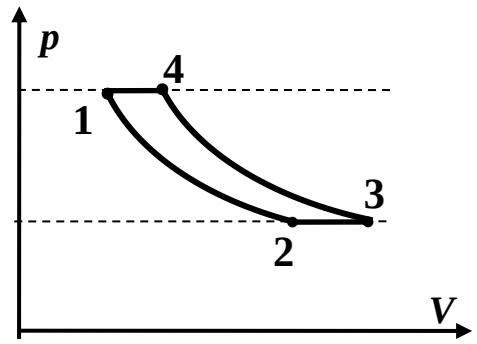
Для охлаждения процессора робота используется холодильная установка, рабочее тело которой – постоянное количество гелия. Цикл рабочего тела состоит из двух адиабат и двух изобар. Известно, что в ходе изобарического расширения температура гелия увеличивается на $\Delta t_1 = 20°C$, а в ходе изобарического сжатия – уменьшается на $\Delta t_2 = 24°C$. Найти холодильный коэффициент этой установки. Ответ запишите в процентах с точностью до целого значения.

Подсказка 1: в адиабатических процессах теплообмена нет.

Подсказка 2: поэтому теплота, забранная за цикл рабочим телом у содержимого холодильника, выражается через теплоемкость гелия в изобарном процессе $c_p = \frac{5}{2}R$: $Q_X = c_p \nu (T_3 - T_2) = c_p \nu \Delta t_1$.

Подсказка 3: аналогично теплота, отданная рабочим телом в окружающую среду, $Q_H = c_p \nu (T_4 - T_1) = c_p \nu \Delta t_2$.

Решение:



Изобразим диаграмму процесса (см. рисунок). Поскольку в адиабатических процессах теплообмена нет, то теплота, забранная за цикл рабочим телом у содержимого холодильника Q_X, как и теплота, отданная рабочим телом в окружающую среду Q_H, выражаются через теплоемкость гелия в изобарном процессе $c_p = \frac{5}{2}R$: $Q_X = c_p \nu (T_3 - T_2) = c_p \nu \Delta t_1$ и $Q_H = c_p \nu (T_4 - T_1) = c_p \nu \Delta t_2$. Из условия энергетического баланса $Q_H = Q_X + A \Rightarrow A = c_p \nu (\Delta t_2 - \Delta t_1)$. Значит, $k \equiv \frac{Q_X}{A} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2 - \Delta t_1} = 500\%$.

ОТВЕТ: 500.

Задание 3.1

Электродвигатель с сопротивлением обмотки $R = 4\,\text{Ом}$ потребляет от источника с ЭДС $\mathrm{E} = 36\,\text{В}$ ток $I = 2{,}5\,\text{А}$. Внутреннее сопротивление источника много меньше сопротивления обмотки. Найти максимально возможную величину полезной мощности, развиваемой двигателем в этом режиме. Ответ запишите в Ваттах в виде целого числа.

Подсказка 1: мощность будет максимально возможной, если все потери, кроме потерь на выделение тепла в обмотке, пренебрежимо малы.

Подсказка 2: тогда работа сторонних сил источника идет только на полезную работу и компенсацию тепловых потерь.

Решение:

Мощность будет максимально возможной, если все потери, кроме потерь на выделение тепла в обмотке, пренебрежимо малы. В этом случае работа сторонних сил источника идет только на полезную работу и компенсацию тепловых потерь: $\mathrm{E}It = A_{\text{пол}} + I^2Rt$. Таким образом, полезная мощность $P_{\text{пол}} = \dfrac{A_{\text{пол}}}{t} = \mathrm{E}I - I^2R = 65\,\text{Вт}$.

ОТВЕТ: 65.

Задание 3.2

Некоторые электродвигатели можно использовать в качестве генератора: при совершении работы по вращению ротора в нем создается ЭДС индукции. При достаточной величине эта ЭДС может заряжать аккумулятор, подключенный к электродвигателю. Пусть ротор электродвигателя вращается за счет натяжения троса, на котором подвешен груз массой $m = 28{,}8\,\text{кг}$. Груз плавно (его движение можно считать практически равномерным) опускается с высоты $H = 3\,\text{м}$ за время $t = 6\,\text{с}$. Найдите увеличение заряда аккумулятора с ЭДС $\mathrm{E} = 36\,\text{В}$, подключенного к двигателю. Сопротивление цепи обмотки ротора равно $R = 4\,\text{Ом}$. Ответ дайте в мА·часах, при необходимости округлив до целого значения. Всеми потерями, кроме выделения тепла в цепи обмотки ротора, пренебречь.

Подсказка 1: при опускании груза его потенциальная энергия переходит в работу по дозарядке источника и в джоулево тепло, выделяющееся в цепи обмотки.

Подсказка 2: работа над источником равна $A_u = \mathrm{E}Q$, а мощность тепловыделения $P_T = I^2R$.

Подсказка 3: сила натяжения троса постоянна (она равна весу груза), и поэтому ток в обмотке ротора постоянен: $Q \approx I \cdot t$.

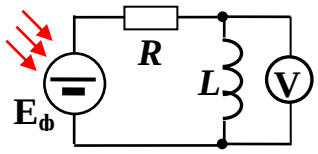
Решение:

При опускании груза, согласно условию, его потенциальная энергия переходит в работу по дозарядке источника и в джоулево тепло, выделяющееся в цепи обмотки. Работа над источником равна $A_u = \mathrm{E}Q$, а мощность тепловыделения $P_T = I^2R$. Поскольку груз опускается равномерно, то сила натяжения троса постоянна (она равна весу груза), и поэтому ток в обмотке ротора постоянен. Это значит, что $Q \approx I \cdot t$. Таким образом, $mgH \approx \mathrm{E}Q + I^2Rt = \mathrm{E}Q + \dfrac{R}{t}Q^2$. Решая это квадратное уравнение относительно искомого заряда Q, находим: $Q \approx \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{E}t}{2R}\right)^2 + \dfrac{mgHt}{R}} - \dfrac{\mathrm{E}t}{2R} = 18\,\text{Кл}$. Переведем эту величину в мА·час: 18 Кл = 5 мА·час (1 мА·час = 10^{-3}А·3600 с = 3,6 Кл).

ОТВЕТ: 5.

Задание 4.1

В цепь фотоэлемента, ЭДС которого пропорциональна мощности поглощаемого светового потока, включены резистор с $R = 40$ Ом и катушка индуктивности $L = 1$ мГн. Изучаемые изменения светового потока происходят за время порядка 0,1 с. Какое напряжение будет показывать идеальный вольтметр, если ЭДС фотоэлемента будет изменяться со скоростью $\frac{\Delta \mathrm{E}}{\Delta t} = 10$ В/с? Ответ запишите в мВ, с точностью до сотых.



Подсказка 1: для $\Delta t = 0{,}1$с безразмерная величина $\frac{L}{R\Delta t} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ очень мала, поэтому ЭДС индукции в катушке $E_i = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ по величине значительно меньше ЭДС фотоэлемента, которая создает ток.

Подсказка 2: ток в контуре $I \approx \frac{\mathrm{E}}{R}$, а измеряемое вольтметром напряжение равно величине ЭДС индукции.

Решение:

При заданных значениях параметры схемы для $\Delta t = 0{,}1$с безразмерная величина $\frac{L}{R\Delta t} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ очень мала, поэтому ЭДС индукции в катушке $E_i = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ по величине значительно меньше ЭДС фотоэлемента, которая создает ток. Поэтому ток в контуре $I \approx \frac{\mathrm{E}}{R}$. Напряжение, измеряемое вольтметром, равно величине ЭДС индукции, то есть $U = \frac{L}{R}\frac{\Delta \mathrm{E}}{\Delta t} = 0{,}25$ мВ.

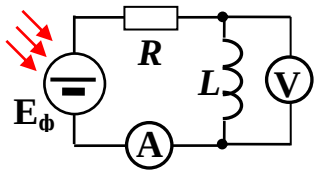
ОТВЕТ: 0,25.

Задание 4.2

Робот снабжен датчиком с фотоэлементом, ЭДС которого пропорциональна мощности поступления световой энергии. Неподалеку от робота находится небольшая лампа, испускающая свет равномерно по всем направлениям. Фотоэлемент датчика включен в цепь, показанную на рисунке. Индуктивность катушки L = 3 мГн мала ($L << R\,t$, где t – интервал времени между фиксациями показаний приборов), сопротивление вольтметра очень велико, а сопротивление амперметра пренебрежимо мало. В начальный момент времени робот находился от лампы на расстоянии $r_0 = 12$ м, а показания приборов дают $I_0 = 0{,}8$ А и $U_0 = 0$ мВ. Далее робот поехал прямо на лампочку. Изменение показаний приборов в зависимости от времени представлены в таблице.

t, с	1	2	3	4	5
I, мА	816	868	966	1134	1422
U, мВ	0,066	0,145	0,255	0,432	0,759

Определите среднее ускорение робота за время наблюдений. Ответ записать в м/с^2, с точностью до десятых.



Подсказка 1: мощность светового потока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния; поскольку при условиях задачи ЭДС индукции можно пренебречь по сравнению с ЭДС фотоэлемента, то так же изменяется и ток в цепи: $I = I_0 \dfrac{r_0^2}{r^2}$.

Подсказка 2: при малых изменениях расстояния $\Delta r << r$ получаем: $\Delta\left(\dfrac{1}{r^2}\right) \approx -\dfrac{2\Delta r}{r^3}$.

Подсказка 3: напряжение на индуктивности равно величине ЭДС индукции $U = L\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = LI_0 r_0^2 \Delta\left(\dfrac{1}{r^2}\right)\dfrac{1}{\Delta t} \approx -LI_0 r_0^2 \dfrac{2}{r^3}\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$.

Решение:

Пусть коэффициент пропорциональности между ЭДС фотоэлемента и мощностью светового потока равен α. Тогда напряжение на индуктивности

$$\mathrm{E}_i = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}|_{\Delta t\to 0} = -\frac{L}{R}\frac{\Delta \mathrm{E}_ф}{\Delta t}|_{\Delta t\to 0} = -\alpha\frac{L}{R}\frac{\Delta P_{св}}{\Delta t}|_{\Delta t\to 0}$$

Мощность светового потока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поскольку при условиях задачи ЭДС индукции можно пренебречь по сравнению с ЭДС фотоэлемента, то так же изменяется и ток в цепи: $I = I_0 \dfrac{r_0^2}{r^2}$. Заметим, что

$$\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{(r+\Delta r)^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2-(r+\Delta r)^2}{r^2(r+\Delta r)^2} = -\frac{2r\Delta r + (\Delta r)^2}{r^2(r+\Delta r)^2}.$$

При малых изменениях расстояния $\Delta r << r$ получаем: $\Delta\left(\dfrac{1}{r^2}\right) \approx -\dfrac{2\Delta r}{r^3}$. Значит,

$$U = L\frac{\Delta I}{\Delta t} = LI_0 r_0^2 \Delta\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{1}{\Delta t} \approx -LI_0 r_0^2 \frac{2}{r^3}\frac{\Delta r}{\Delta t} = 2\frac{LI_0 r_0^2}{r^3}v,$$

где $v \equiv -\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ – скорость сближения источника и датчика. С учетом выражения для расстояния находим, что $U \approx 2\dfrac{LI^{3/2}}{r_0\sqrt{I_0}}v \Rightarrow v = \dfrac{r_0\sqrt{I_0}}{2LI^{3/2}}U$. Построим с помощью этой формулы таблицу значений скорости в зависимости от времени.

t, с	1	2	3	4	5
v, м/с	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00

С учетом того, что $v(0) = 0$, мы обнаруживаем, что это зависимость для равноускоренного движения $v(t) = at$ с $a = 0{,}4$ м/с^2! Очевидно, что «среднее» значения ускорения совпадает с найденным.

ОТВЕТ: 0,4.