10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задачи к занятию 9 основного курса.

Тема: «ПОДГОТОВКА К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ ТУРУ ФИНАЛЬНОГО ЭТАПА».

Задание 1.1

Однородный стержень длиной 1 м и массой 1 кг может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг одного из своих концов, который закреплен шарнирно. На него действуют три силы: сила реакция шарнира, сила тяжести и еще одна сила $\vec{F}$, приложенная к незакрепленному концу стержня под углом 30° к нему. Стержень горизонтален, и в этом положении сила реакции шарнира горизонтальна, а векторная сумма сил равна нулю. Чему равна величина суммарного момента сил относительно шарнира? Ускорение свободного падения считать равным примерно 10 м/с^2. Ответ записать в Н·м, округлив до целого значения.

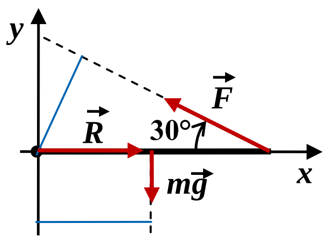
Подсказка 1: Плечо силы реакции шарнира относительно шарнира очевидно равно нулю, и ее величина нам не нужна.

Подсказка 2: Вертикальная компонента силы $\vec{F}$ должна уравновешивать силу тяжести, поэтому $F\sin(30°) = mg$, то есть $F = 2mg$.

Подсказка 3: Плечо силы тяжести равно $\frac{L}{2}$, а плечо силы $\vec{F}$ (расстояние от шарнира до линии действия этой силы) равно $L\sin(30°) = \frac{L}{2}$.

Решение:

Пусть L – длина стержня. Изобразим стержень и действующие на него силы на рисунке, учитывая информацию из условия. Плечо силы реакции шарнира относительно шарнира очевидно равно нулю, и ее величина нам не нужна. Вертикальная компонента силы $\vec{F}$ должна уравновешивать силу тяжести, поэтому $F\sin(30°) = mg$, то есть $F = 2mg$.

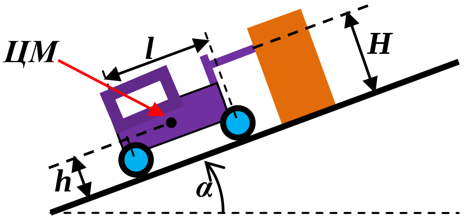


Плечо силы тяжести равно $\frac{L}{2}$, а плечо силы $\vec{F}$ (расстояние от шарнира до линии действия этой силы) равно $L\sin(30°) = \frac{L}{2}$, причем они вращают стержень вокруг шарнира в разных направлениях. Поэтому суммарный момент $F\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}mgL = 5$ Н·м.

ОТВЕТ: 5.

Задание 1.2

Электрокар должен двигать перед собой с постоянной скоростью массивный ящик, поднимаясь по наклонной плоскости. Известно, что масса ящика в 2 раза меньше массы самого электрокара, коэффициенты трения ведущих (задних) колес электрокара и ящика о наклонную плоскость равны $\mu = 0{,}5$. Передние колеса электрокара катятся без проскальзывания, расстояние между осями колес у него $l = 2$ м. Центр масс электрокара находится точно посередине между колесными осями на высоте $h = 0{,}5$ м. Высота точки давления рамы электрокара на ящик над поверхностью равна $H = 1$ м. Найдите максимальный угол наклона плоскости, при котором электрокар может выполнить свою задачу. Ответ запишите в градусах, с точностью до десятых.



Подсказка 1: Используя условие равенства нулю проекции суммы сил, действующих на ящик, на направление вдоль наклонной плоскости, найдем, что сила, действующая на ящик со стороны электрокара $F' = mg\sin(\alpha) + F'_{тр}$. Так как ящик скользит, то $F'_{тр} = \mu N = \mu mg\cos(\alpha)$, и поэтому $F' = mg[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$.

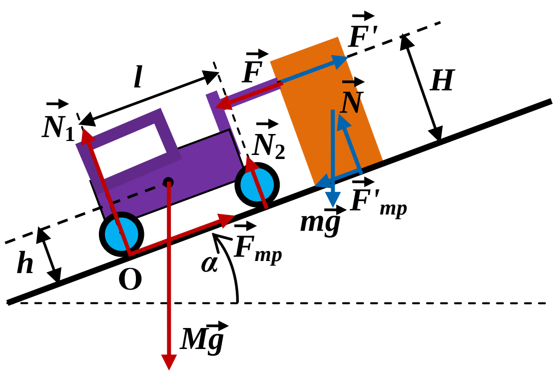
Подсказка 2: Силу нормальной реакции плоскости, действующую на электрокар, удобно разделить на силы, действующие на передние (свободные - N_2) и задние (ведущие - N_1) колеса, силой трения качения свободных колес можно пренебречь, а сила трения $F_{тр}$ ведущих колес направлена вверх вдоль плоскости и равна $F_{тр} = Mg\sin(\alpha) + F$.

Подсказка 3: Должно выполняться условие равенства нулю суммы моментов, которое удобно записывать относительно точки опоры ведущих колес.

Подсказка 4: Для возможности заданного движения необходимо выполнение двух требований: $F_{тр} \le \mu N_1$ и $N_2 \ge 0$.

Решение:

При поступательном движении ящика с постоянной скоростью сумма приложенных к нему сил равна нулю. На рисунке синим цветом показаны силы, действующие на ящик.



Используя условие равенства нулю проекции суммы сил на направление вдоль наклонной плоскости, найдем, что сила, действующая на ящик со стороны электрокара $F' = mg\sin(\alpha) + F'_{тр}$. Так как ящик скользит, то $F'_{тр} = \mu N = \mu mg\cos(\alpha)$, и поэтому $F' = mg[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$. По третьему закону Ньютона такую же величину имеет сила F, действующая со стороны ящика на электрокар. Красным цветом показаны вектора сил, приложенных к электрокару. Обратим внимание, что силу нормальной реакции плоскости мы разделили на силы, действующие на передние (свободные) и задние (ведущие) колеса, и что силой трения качения свободных колес мы пренебрегаем. Сила трения $F_{тр}$ ведущих колес направлена вверх вдоль плоскости – именно она обеспечивает движение электрокара и ящика. Проекция на направление вдоль наклонной плоскости суммы сил, действующих на электрокар, также должна быть равна нулю. Из этого условия найдем необходимую величину силы трения ведущих колес: $F_{тр} = Mg\sin(\alpha) + mg[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$. С учетом того, что по условию $M = 2m$, получаем: $F_{тр} = mg[3\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$. Кроме того, должна равняться нулю и сумма моментов сил, которую удобно вычислять относительно точки О (тогда плечи сил $F_{тр}$ и N_1 равны нулю). При записи этого условия наиболее аккуратно нужно вычислять плечо силы $M\vec{g}$ относительно точки О. Оно равно $l_g = \frac{l}{2}\cos(\alpha) - h\sin(\alpha)$. Итак, правило моментов приводит к соотношению $+N_2 l + FH - Mg\left(\frac{l}{2}\cos(\alpha) - h\sin(\alpha)\right) = 0$, из которого можно найти величину $N_2 = mg\left[\cos(\alpha) - \frac{2h}{l}\sin(\alpha)\right] - mg\frac{H}{l}[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$.Учтем, что в соответствии с условием $\frac{H}{l} = \frac{1}{2}$, $\frac{h}{l} = \frac{1}{4}$, а $\mu = \frac{1}{2}$. Тогда $N_2 = mg\left[\frac{3}{4}\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\right]$. Сумма сил реакции уравновешивает компоненту силы тяжести электрокара, и $N_1 = 2mg\cos(\alpha) - N_2 = mg\left[\frac{5}{4}\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\right]$. Такое движение возможно при выполнении двух условий:

1) $F_{тр} \le \mu N_1 \Rightarrow mg\left[3\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\alpha)\right] \le mg\left[\frac{5}{8}\cos(\alpha) + \frac{1}{2}\sin(\alpha)\right]$, откуда $\mathrm{tg}(\alpha) \le \frac{1}{20}$.
2) Передние колеса не отрываются от поверхности, то есть $N_2 = mg\left[\frac{3}{4}\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\right] \ge 0$, откуда $\mathrm{tg}(\alpha) \le \frac{3}{4}$.

Как видно, первое условие значительно более жесткое, и максимальный угол, при котором возможно движение вверх вдоль плоскости электрокара с грузом $\alpha_{\max} = \mathrm{arctg}(0{,}05) \approx 2{,}9°$.

ОТВЕТ: 2,9.

Задание 2.1

Одноатомный идеальный газ, в изобарном процессе совершил работу A, и при этом его внутренняя энергия изменилась на ΔU. Чему равно отношение $\frac{\Delta U}{A}$? Ответ запишите с точностью до десятых.

Подсказка 1: Работа газа в изобарном процессе при давлении p равна $A = p(V_2 - V_1)$.

Подсказка 2: Изменение внутренней энергии, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, $\Delta U = \Delta\left(\frac{3}{2}\nu RT\right) = \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{3}{2}p(V_2 - V_1)$.

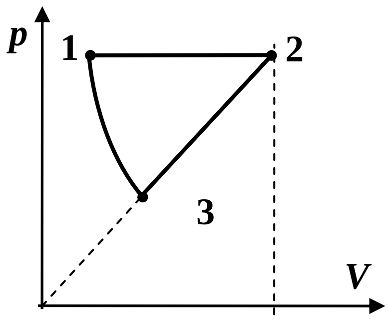
Решение:

Рассмотрим изменение объема газа от V_1 до V_2. Работа газа в изобарном процессе при давлении p равна $A = p(V_2 - V_1)$. При этом изменение внутренней энергии, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, $\Delta U = \Delta\left(\frac{3}{2}\nu RT\right) = \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{3}{2}p(V_2 - V_1)$. Поэтому $\frac{\Delta U}{A} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

ОТВЕТ: 1,5.

Задание 2.2

В тепловом двигателе в качестве рабочего тела используется одноатомный идеальный газ. Цикл рабочего тела состоит из изобары 1-2, процесса 2-3, диаграмма которого в координатах давление-объем – прямая, проходящая через начало координат, и изотермы 3-1 (см. рисунок). Известно, что в изотермическом процессе над газом совершается работа, равная четверти работы над газом в процессе 2-3. При этом 20% работы рабочего тела в цикле расходуется на компенсацию потерь на трение в узлах двигателя. Остальные потери можно считать пренебрежимо малыми. Найти КПД двигателя. Ответ приведите в процентах, при необходимости округлив до целого значения.



Подсказка 1: С учетом соотношения, полученного в ответе на вопрос, теплота нагревателя $Q_H = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = \frac{5}{2}A_{12}$.

Подсказка 2: Для процесса 2-3, в котором $p = \alpha \cdot V$, работа газа равна площади под диаграммой процесса в координатах $p - V$, то есть $A_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_3 - V_2) = \frac{\alpha}{2}(V_3^2 - V_2^2) = \frac{\nu R}{2}(T_3 - T_2)$, а изменение внутренней энергии $\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2)$.

Подсказка 3: В изотермическом процессе внутренняя энергия газа не изменяется, поэтому $\Delta U_{12} = -\Delta U_{23}$.

Подсказка 4: И полную работу в цикле, и теплоту нагревателя можно выразить через $A'_{31} = -A_{31}$.

Решение:

В процессе 1-2 газ получает тепло, а в процессах 2-3 и 3-1 – отдает. Поэтому теплота нагревателя $Q_H = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}$. В соответствии с результатом, полученным в ответе на вопрос, $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}A_{12} \Rightarrow Q_H = \frac{5}{2}A_{12}$. Для процесса 2-3 тоже можно связать работу с изменением внутренней энергии. Работа газа равна площади под диаграммой процесса в координатах $p-V$ (площади трапеции), то есть (учтем, что в этом процессе $p = \alpha \cdot V$) $A_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_3 - V_2) = \frac{\alpha}{2}(V_3^2 - V_2^2)$. При этом изменение температуры, в соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона $\Delta T = \frac{1}{\nu R}(p_3V_3 - p_2V_2) = \frac{\alpha}{\nu R}(V_3^2 - V_2^2)$, поэтому $A_{23} = \frac{\nu R}{2}\Delta T$. Изменение внутренней энергии $\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = 3A_{23} = -3A'_{23}$.($A'_{23}$ – это работа над газом, которая всегда противоположна по знаку работе газа). В изотермическом процессе внутренняя энергия газа не изменяется, поэтому $\Delta U_{12} = -\Delta U_{23}$. Используя соотношения между изменениями внутренней энергии и работой, находим: $\frac{3}{2}A_{12} = 3A'_{23} \Rightarrow A_{12} = 2A'_{23}$. Согласно условию, работа $A'_{23} = 4A'_{31}$, поэтому $A_{12} = 8A'_{31}$. Поэтому работа в цикле $A = A_{12} - A'_{23} - A'_{31} = 3A'_{31}$, а теплота нагревателя $Q_H = \frac{5}{2}A_{12} = 20A'_{31}$. Значит, КПД цикла (без учета потерь на трение) $\eta_c = \frac{A}{Q_H} = \frac{3}{20}$. С учетом потерь на трение КПД двигателя $\eta = 0{,}8 \cdot \eta_c = \frac{3}{25} = 12\%$.

ОТВЕТ: 12.

Задание 3.1
Электромотор подключен к аккумулятору с ЭДС $\mathrm{E} = 24$ В и потребляет постоянный ток $I = 2$ А. Полезная мощность, развиваемая мотором, составляет $P_n = 32$ Вт. Чему равно полное сопротивление контура обмотки ротора (то есть сумма внутреннего сопротивления аккумулятора, подводящих проводов и сопротивления обмотки ротора)? Потерями на трение в узлах двигателя пренебречь. Ответ запишите в омах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Согласно условию, мощность, отдаваемая в цепь аккумулятором, расходуется на компенсацию тепловых потерь в контуре обмотки ротора и полезную работу.
Подсказка 2: Значит, $\mathrm{E} \cdot I = RI^2 + P_n$.

Решение:

Согласно условию, мощность, отдаваемая в цепь аккумулятором $P_A = \mathrm{E} \cdot I$, расходуется на компенсацию тепловых потерь в контуре обмотки ротора (мощность которых $P_Q = RI^2$) и полезную работу. Значит, $\mathrm{E} \cdot I = RI^2 + P_n$, откуда $R = \frac{\mathrm{E} \cdot I - P_n}{I^2} = 4$ Ом.

ОТВЕТ: 4.

Задание 3.2
С помощью легких прочных тросов и электродвигателей из воды вытаскивают небольшой груз. Средняя плотность груза равна плотности воды, а сила сопротивления, действующая на груз со стороны воды, с хорошей точностью пропорциональна скорости его подъема. Если к грузу прицепить вертикальный трос от одного электродвигателя и использовать для питания двигателя аккумулятор с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, то в установившемся режиме груз поднимается со скоростью $v_1 = 0{,}3$ м/с. Если использовать два таких электродвигателя, подключенных к тому же аккумулятору параллельно (оба троса практически вертикальны), то скорость подъема увеличится до $v_2 = 0{,}4$ м/с. Какой станет скорость подъема, если аналогичным образом использовать три таких же электродвигателя? Известно, что сила натяжения троса, создаваемая электродвигателем, прямо пропорциональна силе тока, текущего в обмотке его ротора. Ответ запишите в м/с с точностью до сотых.

Подсказка 1: Уравнение энергетического баланса цепи при использовании *n* электродвигателей имеет вид $\mathrm{E} \cdot I_n = nR(I_n / n)^2 + P_n$, где I_n – ток аккумулятора, а P_n – полезная мощность, развиваемая всеми двигателями.
Подсказка 2: $P_n = F_c \cdot v_n = \alpha v_n^2$ (v_n – скорость подъема груза при использовании *n* электродвигателей, *α* – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью).
Подсказка 3: Ясно, что тросы натянуты одинаково, а по условию сила натяжения каждого троса пропорциональна силе тока в обмотке ротора одного двигателя с некоторым коэффициентом (обозначим его *k*). Поэтому $\alpha \cdot v_n = n \cdot k \cdot \frac{I_n}{n} \Rightarrow I_n = \frac{\alpha}{k} v_n$.
Подсказка 4: Удобнее анализировать поведение **обратной скорости** $\frac{1}{v_n} = \frac{k}{\mathrm{E}} + \frac{\alpha R}{k\mathrm{E}} \frac{1}{n}$, так как оно проще зависит от *n*.

Решение:

Запишем уравнение энергетического баланса цепи при использовании *n* электродвигателей. Если ток аккумулятора равен I_n, то каждый двигатель потребляет ток $\frac{1}{n} I_n$. Обозначим R сопротивление цепи ротора каждого из электродвигателей, а E – ЭДС аккумулятора. Тогда $\mathrm{E} \cdot I_n = nR(I_n / n)^2 + P_n$. Полезная мощность P_n, развиваемая всеми двигателями, равна мощности работы против силы сопротивления: $P_n = F_c \cdot v_n = \alpha v_n^2$ (v_n – скорость подъема груза при использовании *n* электродвигателей). В этом выражении мы использовали информацию из условия о том, что сила сопротивления пропорциональна скорости: $|\vec{F}_c| = \alpha \cdot v$. В установившемся режиме груз движется с постоянной скоростью, то есть сила натяжения троса равна по величине силе сопротивления (архимедова сила и сила тяжести компенсируют друг друга, так как средняя плотность груза равна плотности воды). Ясно, что тросы натянуты одинаково, а по условию сила натяжения каждого троса пропорциональна силе тока в обмотке ротора одного двигателя с некоторым коэффициентом (обозначим его *k*). Поэтому $\alpha \cdot v_n = n \cdot k \cdot \frac{I_n}{n} \Rightarrow I_n = \frac{\alpha}{k} v_n$. Следовательно, $\mathrm{E} \cdot \frac{\alpha}{k} v_n = \frac{R\alpha^2}{k^2 n} v_n^2 + \alpha v_n^2$. Из этого соотношения находим, что $v_n = \dfrac{\mathrm{E}kn}{\alpha R + k^2 n}$. Удобнее анализировать поведение **обратной скорости** $\dfrac{1}{v_n} = \dfrac{k}{\mathrm{E}} + \dfrac{\alpha R}{k\mathrm{E}}\dfrac{1}{n}$, так как оно проще зависит от *n*. В самом деле, из выражений $\dfrac{1}{v_1} = \dfrac{k}{\mathrm{E}} + \dfrac{\alpha R}{k\mathrm{E}}$ и $\dfrac{1}{v_2} = \dfrac{k}{\mathrm{E}} + \dfrac{\alpha R}{2k\mathrm{E}}$ находим, что $\dfrac{\alpha R}{2k\mathrm{E}} = \dfrac{1}{v_1} - \dfrac{1}{v_2}$. Затем, из соотношения $\dfrac{1}{v_3} = \dfrac{k}{\mathrm{E}} + \dfrac{\alpha R}{3k\mathrm{E}}$ получаем $\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_3} = \dfrac{\alpha R}{6k\mathrm{E}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{v_1} - \dfrac{1}{v_2}\right)$. Следовательно, $v_3 = \dfrac{3v_1 v_2}{4v_1 - v_2} = 0{,}45\,\text{м/с}$.

ОТВЕТ: 0,45.

Здесь очень важно обратить внимание, что, несмотря на огромное количество неизвестных характеристик рассматриваемой системы, нам удалось найти ответ – благодаря использованию заданных зависимостей между характеристиками и анализу полученной функциональной зависимости скорости подъема от числа электродвигателей!

Задание 4.1

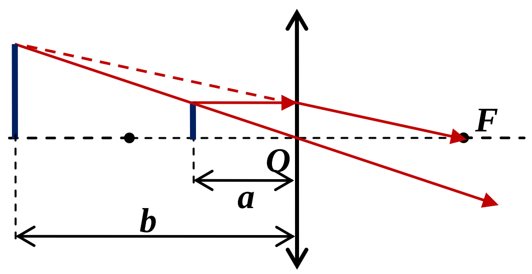
Поперечное увеличение изображения (для тонких линз) – отношение размеров изображения к размеру предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Иногда его определяют и как алгебраическую величину: в этом случае увеличение считается положительным для прямых изображений и отрицательным для перевернутых. Допустим, Вы рассматриваете мелкий текст с помощью лупы (собирающей линзы с оптической силой *D* = +4 дптр), и при этом лупа находится на расстоянии *a* = 15 см от текста. С каким поперечным увеличением Вы должны видеть текст? Ответ приведите с точностью до десятых.

Подсказка 1: Линза формирует мнимое прямое увеличенное изображение, причем отношение размеров изображения к размеру объекта $k = \dfrac{l'}{l} = \left|\dfrac{b}{a}\right|$ (напомним, что расстояние до мнимого изображения в теории тонких линз считается отрицательным).

Подсказка 2: Согласно формуле линзы, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F} \Rightarrow b = \dfrac{aF}{a-F} \Rightarrow \quad k = \dfrac{F}{F-a}$.

Решение:

Отметим, что фокусное расстояние линзы $F = \dfrac{1}{D} = 25\,\text{см}$. Таким образом, $a < F$. Произведем построение изображения с помощью двух лучей – идущего через оптический центр линзы без преломления и идущего параллельно оптической оси (после преломления направляется в фокус линзы).



Как видно, линза формирует мнимое прямое увеличенное изображение, причем отношение размеров изображения к размеру объекта $k = \frac{l'}{l} = \left|\frac{b}{a}\right|$ (напомним, что расстояние до мнимого изображения в теории тонких линз считается отрицательным). Согласно формуле линзы, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{a-F} \Rightarrow \quad k = \frac{F}{F-a} = 2{,}5$.

ОТВЕТ: 2,5.

Задание 4.2

Взяв старый пленочный фотоаппарат, школьник Вася отправился фотографировать соревнования по легкой атлетике. Сделав достаточное количество фотографий с разными выдержками, Вася обнаружил, что спортсмены, пробегавшие на расстоянии $a_0 = 10$ м от фотоаппарата перпендикулярно оптической оси объектива, получались на снимках четкими, если затвор фотоаппарата открывался на время, не превосходящее $\tau = 0{,}001$ с. При этом неподвижные предметы, расположенные на расстояниях менее $a_1 = 5$ м от фотоаппарата, получались размытыми. Определите диаметр D объектива фотоаппарата. Скорости спортсменов считайте равными $v = 10$ м/с. Ответ запишите в мм, при необходимости округлив до ближайшего целого значения.

Подсказка 1: При фотографировании спортсмена с максимально допустимой выдержкой каждая его точка превращается в пятно размером $\delta = v\tau\frac{d}{a_0}$, где d – расстояние от объектива фотоаппарата до пленки.

Подсказка 2: Следовательно, изображение точки следует считать нечетким при размерах этого изображения, превосходящих δ.

Подсказка 3: Лучи, испущенные из точечного источника на расстоянии a_1 от объектива, формируют на пленке пятно диаметром $D\frac{d_1 - d}{d_1}$ (d_1 – расстояние от объектива до изображения этого источника). Поскольку это положение объектов, начиная с которого они становятся нечетким, то этот размер совпадающим с минимальным размером δ размытого изображения.

Подсказка 4: По формуле тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{a_0} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{F}$.

Решение:

Пусть d – расстояние от объектива фотоаппарата до пленки. При фотографировании спортсмена с максимально допустимой выдержкой каждая его точка превращается в пятно размером $\delta = v\tau\frac{d}{a_0}$ (см. рисунок 1). Следовательно, изображение точки следует считать нечетким при размерах этого изображения, превосходящих δ.

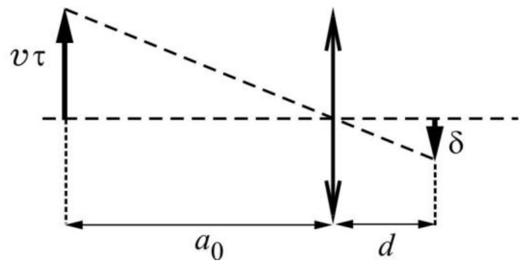


Рис.1

Изображение точечного источника, находящегося на расстоянии a_1 от объектива, формируется не на пленке на расстоянии d от объектива, а на некотором другом расстоянии d_1 от него. Лучи, испущенные из источника, формируют на пленке пятно диаметром $D\dfrac{d_1-d}{d_1}$. Поскольку это положение объектов, начиная с которого они становятся нечетким, то этот размер совпадающим с минимальным размером δ размытого изображения (см. рисунок 2). Отсюда $D\dfrac{d_1-d}{d_1}=\delta=v\tau\dfrac{d}{a_0}$, и $\dfrac{v\tau}{a_0}=D\left(\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{d_1}\right)$.

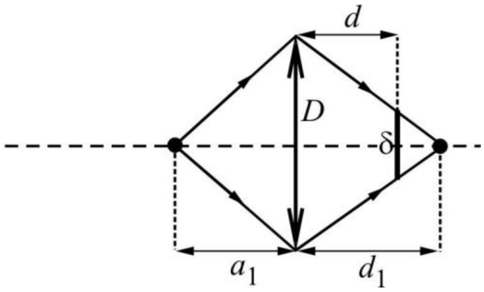


Рис.2

Используя формулу тонкой линзы $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{a_0}=\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{F}$ (F – фокусное расстояние объектива), получим: $\dfrac{v\tau}{a_0}=D\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_0}\right)$, и $D=\dfrac{v\tau}{a_0/a_1-1}=10$ мм.

ОТВЕТ: 10.