

**10-11 классы, подготовка к теоретическому туру**  
**олимпиады школьников «Робофест» по физике**

**Набор задач для самостоятельного решения к вводному занятию «колебания и волны».**

**Задача 1 (2 балла) [пружинный маятник, гармонические колебания, амплитуда]**

Грузик, подвешенный на пружине, совершает вертикальные колебания, затухание которых почти не заметно. За время  $t = 20$  с он  $N = 25$  раз опустился из самой верхней в самую нижнюю точку (и столько же раз поднялся), пройдя за это время путь  $s = 180$  см. Найти максимальную величину скорости колебаний грузика. Ответ запишите в см/с, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Период колебаний грузика  $T = \frac{t}{N} = 0,8$  с.

Подсказка 2: Пройденный путь соответствует  $4N$  амплитудам колебаний, поэтому  $x_m = \frac{s}{4N} = 1,8$  см.

Подсказка 3: Амплитуда скорости связана с амплитудой смещения соотношением  $v_m = \omega \cdot x_m$ .

Решение:

Как видно, период колебаний грузика  $T = \frac{t}{N} = 0,8$  с. Ясно, что пройденный путь соответствует  $4N$  амплитудам колебаний, поэтому  $x_m = \frac{s}{4N} = 1,8$  см. Максимальная величина скорости соответствует амплитудному значению скорости, которое связано с амплитудой смещения соотношением  $v_m = \omega \cdot x_m$ . Поэтому  $v_m = 2\pi \cdot \frac{x_m}{T} = \frac{\pi s}{2t} \approx 14$  см/с.

Ответ: 14.

**Задача 2 (3 балла) [пружинный маятник, гармонические колебания]**

Две небольшие шайбы с массами  $m_1 = 300$  г и  $m_2 = 900$  г, находящиеся на горизонтальном гладком стержне, прикреплены к разным концам легкой пружины с жесткостью  $k = 90$  Н/м. Изначально шайбы покоились. Их немного раздвинули в разные стороны, увеличив длину пружины, и аккуратно отпустили. Найдите период изменения расстояния между шайбами после этого. Ответ запишите в секундах, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Если изучать движение в проекции на ось  $x$ , направленную вдоль стержня, и отсчитывать координату каждой шайбы от ее положения равновесия, то деформация пружины равна  $\Delta l = x_2 - x_1$ .

Подсказка 2: Удобно рассмотреть уравнение движения для относительной координаты  $x = x_2 - x_1$ .

Подсказка 3: Относительная координата изменяется с ускорением.

Решение:

Введем ось  $x$ , направленную вдоль стержня, и будем отсчитывать координату каждой шайбы от ее положения равновесия (отметим, что, когда шайбы покоились, то пружина не была деформирована). Тогда растяжение пружины соответствует  $\Delta l = x_2 - x_1$ . Запишем уравнения движения шайб в проекциях на эту ось и преобразуем их:

$$\left\{ \begin{matrix} m_1 a_1 = k(x_2 - x_1) \\ m_2 a_2 = k(x_1 - x_2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a_1 = \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1) \\ a_2 = \frac{k}{m_2}(x_1 - x_2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow a_2 - a_1 = -\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}(x_2 - x_1).$$

Как видно, *относительная координата* шайб  $x = x_2 - x_1$  подчиняется уравнению гармонических колебаний  $x'' + \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}x = 0$ , то есть циклическая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}. \text{ Поэтому период этих колебаний } T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} \approx 0,314 \text{ с.}$$

Ответ: 0,3.

### Задача 3 (3 балла) [пружинный маятник, математический маятник, гармонические колебания]

Маленький тяжелый грузик подвесили на легкой пружине, и измерили период его вертикальных колебаний. Точно такой же грузик подвесили на легкой нерастяжимой нити, подобрав ее длину так, чтобы период малых колебаний полученного маятника в точности равнялся периоду колебаний на пружине первого груза. Оба получившихся маятника (пружинный и «математический») доставили на Луну и запустили. Найдите отношение периодов этих маятников на Луне. В ответе укажите  $\frac{T_{\text{мат}}}{T_{\text{пр}}}$ , с точностью до сотых. Ускорение свободного падения на поверхности Земли считайте равным  $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ , на поверхности Луны –  $g' \approx 1,62 \text{ м/с}^2$ .

Подсказка 1: Период колебаний пружинного маятника  $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Подсказка 2: Период малых колебаний математического маятника  $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Подсказка 3: Период вертикальных колебаний пружинного маятника на Луне не изменится.

Решение:

Период вертикальных колебаний пружинного маятника  $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$  не зависит от ускорения свободного падения, и поэтому на Луне он не изменится. Период малых колебаний математического маятника  $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ , и он на Луне увеличится. Следовательно,

$$\frac{T_{\text{мат}}}{T_{\text{пр}}} = \sqrt{\frac{g}{g'}} \approx 2,46.$$

Ответ: 2,46.

### Задача 4 (4 балла) [закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, гармонические колебания]

Тело массы  $m = 40 \text{ г}$  совершает гармонические колебания с амплитудой  $x_m = 3 \text{ см}$  по гладкой горизонтальной плоскости на невесомой пружине жесткостью  $k = 1 \text{ Н/м}$ . На него налетает движущийся вдоль оси пружины со скоростью  $v_0 = 0,4 \text{ м/с}$  гладкий шар втрое меньшей массы. Какой станет амплитуда колебаний после упругого лобового удара, произошедшего в момент остановки тела? Ответ выразить в сантиметрах.

Подсказка 1: при ударе шара о тело можно пренебречь действием пружины.

Подсказка 2: при лобовом упругом соударении тела массы  $m_1$ , летевшего со скоростью  $v_0$ , с покоящимся телом массы  $m_2$ , скорости тел после удара  $v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0$  и  $v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0$  (в проекции на направление  $\vec{v}_0$ ).

Подсказка 3: в момент удара тело находилось в положении максимального отклонения от положения равновесия, и поэтому полная энергия «новых» колебаний  $E = \frac{kx_m^2}{2} + \frac{m(v_0/2)^2}{2}$ , что позволяет найти их амплитуду.

Решение:

При анализе удара можно пренебречь действием силы упругости пружины и применять законы сохранения импульса и энергии. В результате лобового упругого соударения тело приобретет скорость  $V = \frac{2 \cdot (m/3)}{m + m/3}v_0 = \frac{v_0}{2}$ . Налетающий шар после удара будет двигаться в сторону, противоположную его первоначальному движению, со скоростью  $v = \frac{m - m/3}{m + m/3}v_0 = \frac{v_0}{2}$  (из этого ясно, что второго соударения не будет). Так как в момент удара тело находилось в положении максимального отклонения от положения равновесия, то полная энергия колебаний после удара

$$E = \frac{kx_m^2}{2} + \frac{m(v_0/2)^2}{2} = \frac{k\tilde{x}_m^2}{2} \Rightarrow \tilde{x}_m = \sqrt{x_m^2 + \frac{mv_0^2}{4k}} = 5 \text{ см.}$$

ОТВЕТ: 5.

**Задача 5 (5 баллов) [уравнение гармонических колебаний, амплитуда смещения, амплитуда скорости]**

Длинный железнодорожный состав движется по инерции со скоростью  $v_0 = 6 \text{ м/с}$  по горизонтальным рельсам, а затем въезжает на горку с постоянным углом наклона  $\alpha = 4^\circ$  к горизонту. Состав полностью остановился за время  $T = 30 \text{ с}$ , не доехав до конца склона. Какая часть состава к моменту остановки оказалась на склоне горки? Трением качения и длиной переходного участка при въезде на горку пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ . Распределение массы по длине состава считать равномерным. Ответ запишите в процентах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Весь состав в каждый момент времени движется с одинаковыми скоростью и ускорением, причем это ускорение создается проекцией веса части состава, находящейся на склоне, на склон.

Подсказка 2: Движение «головы» состава по склону происходит по гармоническому закону.

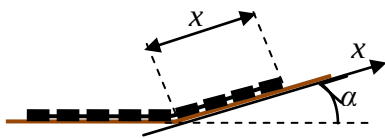
Подсказка 3: В проекции на ось  $x$ , направленную вдоль склона, уравнение движения состава имеет вид  $ma_x = -mg \frac{x}{L} \sin(\alpha)$ , где  $x$  – координата «головы» состава, отсчитываемая от начала подъема, а  $L$  – длина состава.

Подсказка 4: Нужно использовать связь амплитуд смещения и скорости при гармоническом движении  $x_m = \frac{v_0}{\omega}$ .

Решение:

Запишем уравнение движения состава, используя в качестве координаты координату его «головы»  $x$ , отсчитываемую от начала подъема вдоль склона. Весь состав в каждый момент времени движется с одинаковыми скоростью и ускорением, причем это ускорение создается проекцией веса части состава, находящейся на склоне, на ось  $x$ :

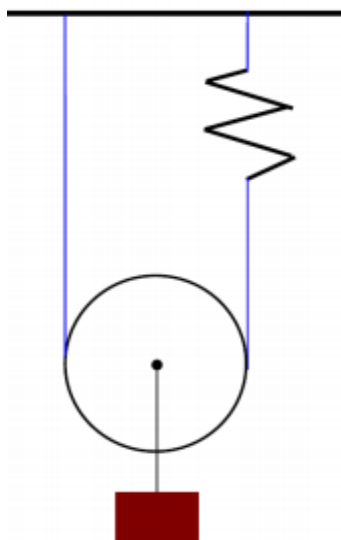
$ma_x = -mg \frac{x}{L} \sin(\alpha) \Rightarrow x'' + \frac{g \sin(\alpha)}{L} x = 0$  ( $L$  – длина состава). Как видно, движение «головы» состава по склону происходит по гармоническому закону. Так как «колебание» начинается из положения равновесия, то его можно описать выражением  $x(t) = x_m \sin(\omega t)$ , где  $\omega = \sqrt{\frac{g \sin(\alpha)}{L}}$ , а амплитуда смещения выражается через амплитуду скорости, совпадающей со скоростью состава на горизонтальном участке:  $x_m = \frac{v_0}{\omega}$ . Время подъема до остановки – это четверть периода колебаний  $T = \frac{\pi}{2\omega}$ , поэтому  $\omega = \frac{\pi}{2T}$ , и соответственно  $x_m = \frac{2v_0 T}{\pi}$ . Длина состава находится также через циклическую частоту  $L = \frac{g \sin(\alpha)}{\omega^2} = \frac{4g \sin(\alpha) T^2}{\pi^2}$ . Поэтому доля длины состава, оказавшаяся на горке к моменту остановки  $k = \frac{x_m}{L} = \frac{\pi v_0}{2gT \sin(\alpha)} \approx 0,45$ . То есть примерно 45%.



Ответ: 45.

#### Задача 6 (3 балла) [гармонические колебания, пределы гармоничности]

Груз с массой  $m = 400\text{г}$  прикреплен отрезком легкой нерастяжимой нити к оси подвижного блока, находящегося в петле длинной легкой нерастяжимой нити. Один конец этой нити закреплен на потолке непосредственно, а другой – посредством легкой пружины жесткостью  $k = 10\text{Н/м}$  (см. рисунок). Система находилась в равновесии, а затем груз отвели вниз на расстояние  $h$  и аккуратно отпустили. При какой максимальной величине  $h$  возникающие колебания будут гармоническими? Ответ выразить в см. Ускорение свободного падения считать равным  $g \approx 10\text{м/с}^2$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.



Подсказка 1: колебания перестанут быть гармоническими, если нить провиснет, а это произойдет, когда пружина достигает недеформированного состояния и ускорение груза будет равно  $\vec{g}$ .

Подсказка 2: груз смещают от положения равновесия и отпускают без начальной скорости, поэтому  $h$  – амплитуда колебаний груза.

Подсказка 3: любое смещение груза изменяет длину петли (причем только за счет изменения длины пружины, так как нить нерастяжима) на вдвое большую величину.

Решение:

Ясно, что колебания перестанут быть гармоническими, если нить провиснет. Так как нить соединена с пружиной, то сила ее натяжения обращается в ноль в момент времени, когда пружина достигает недеформированного состояния. Груз смещают от положения равновесия и отпускают без начальной скорости, поэтому  $h$  – амплитуда колебаний груза. Любое смещение груза изменяет длину петли (причем только за счет изменения длины пружины, так как нить нерастяжима) на вдвое большую величину, поэтому уравнение движения груза

$$ma_x = mg - 2T = -2k\Delta l = -4kx \Rightarrow x'' + \frac{4k}{m}x = 0.$$

Частота гармонических колебаний  $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ , и амплитуда ускорения  $a_m = \omega^2 x_m = \frac{4k}{m} \cdot h$ .

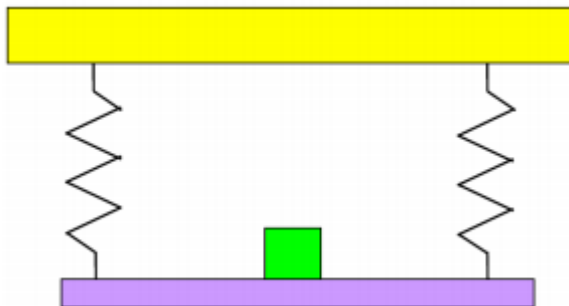
Требование отсутствия провисания нити  $a_m \leq g$  дает  $h \leq \frac{mg}{4k}$ . Таким образом,

$$(h)_{\max} = \frac{mg}{4k} = 10 \text{ см.}$$

Ответ: 10.

#### Задача 7 (4 балла) [гармонические колебания, пределы гармоничности]

Однородная доска массой  $M = 300 \text{ г}$  подвешена на двух одинаковых легких пружинах жесткостью  $k = 10 \text{ Н/м}$ . Груз вдвое меньшей массы помещен на доску посередине (см. рисунок). Система находится в равновесии, причем доска горизонтальна. Груз с доской толкают строго вверх, сообщив им скорость  $V$ . При какой максимальной величине  $V$  возникающие колебания будут гармоническими? Ответ выразить в  $\text{дм/с}$ . Считать, что в процессе движения доска всегда остается горизонтальной. Ускорение свободного падения считать равным  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.



Подсказка 1: колебания доски с грузом будут гармоническими, только если груз не будет «подскакивать» на доске.

Подсказка 2: если груз не «подскакивает», то уравнение колебаний доски с грузом

$$x'' + \frac{4k}{3M}x = 0.$$

Подсказка 3: сила нормальной реакции доски, действующая на груз,  $N \geq 0$ , если ускорение груза в проекции на ось  $x$ , направленную вертикально вниз, удовлетворяет ограничению  $a_x \leq g$ .

Решение:

Сразу определим причину, по которой колебания могут перестать быть гармоническими: если груз начнет «подскакивать» на доске, то из-за изменения массы колеблющегося тела и ударов при «столкновениях» гармоничность закона движения явно нарушится. Далее

установим, при каких условиях происходит отрыв груза от доски: ускорение груза создается равнодействующей силы тяжести и силы реакции доски. Ясно, что сила реакции доски направлена вверх, и при  $N \geq 0$  ускорение груза в проекции на ось  $x$ , направленную вертикально вниз, должно удовлетворять ограничению  $a_x \leq g$ . Значит, колебания будут гармоническими, если амплитуда изменения ускорения доски с лежащим на ней грузом не превышает  $g$ . Уравнение движения доски с грузом (как «обычно»: отсчитываем координату  $x$  от положения равновесия, и поэтому сила тяжести сразу сокращается частью сил упругости, связанной с «равновесным» удлинением пружин)

$$\left(M + \frac{M}{2}\right)a_x = -2kx \Rightarrow x'' + \frac{4k}{3M}x = 0,$$

и частота гармонических колебаний  $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{3M}}$ . Поскольку движение начинается из положения равновесия, то амплитуда скорости равна начальной скорости  $V$ . Из кинематических соотношений для гармонических колебаний известно, что амплитуда ускорения  $a_m = \omega v_m = 2\sqrt{\frac{k}{3M}} \cdot V$ , и поэтому требование  $a_m \leq g$  дает  $V \leq \frac{g}{2}\sqrt{\frac{3M}{k}}$ . Таким образом,  $(V)_{\max} = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{3M}{k}} = 15 \text{ дм/с}$ .

Ответ: 15.