**7-9 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Робофест» по физике**

Набор задач для самостоятельного решения к вводному занятию «законы сохранения в механике».

Задача 1 (2 балла) [закон сохранения импульса]

Камень массой $m=4$ кг падает со скоростью $v=14$ м/с под углом $\alpha=30^\circ$ к вертикали в тележку с песком общей массой $M=36$ кг, и застревает в песке. До падения камня тележка покоилась на горизонтальных рельсах, а после падения покатила по ним, не подпрыгнув. Найти скорость качения тележки сразу после падения камня. Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Внешние силы, действующие на систему «тележка + камень» - сила тяжести и сила реакции рельсов – направлены вертикально.

Подсказка 2: Как видно из условия, вертикальная компонента импульса камня была поглощена при ударе, а горизонтальная перешла в импульс тележки с камнем.

Решение:

Как видно из условия, вертикальная компонента импульса камня была поглощена при ударе, а горизонтальная перешла в импульс тележки с камнем (внешние силы, действующие на систему «тележка + камень» - сила тяжести и сила реакции рельсов – направлены вертикально). Поэтому уравнение закона сохранения горизонтальной компоненты импульса

$$mv\sin(\alpha) = (M + m)V. \text{ Таким образом, искомая скорость } V = \frac{m}{M + m} v\sin(\alpha) = 0,7 \text{ м/с.}$$

Ответ: 0,7.

Задача 2 (2 балла) [закон сохранения импульса]

Фигурист массой $M=57$ кг скользит, двигаясь прямолинейно по гладкому льду со скоростью $v_0=1,5$ м/с, держа в руках кирпич массой $m=3$ кг. Внезапно он бросает кирпич по направлению своего движения, придав ему скорость $u=6$ м/с относительно себя. С какой скоростью v он продолжит движение после броска? Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

Подсказка 1: Сила нормальной реакции льда уравнивает сумму сил тяжести, действующих на фигуриста и кирпич, поэтому в процессе броска (до самого момента отпускания кирпича фигуристом) систему «фигурист + кирпич» можно считать замкнутой.

Подсказка 2: В системе отсчета, связанной со льдом, проекция скорости кирпича в момент отпускания на ось движения фигуриста равна $v + u$.

Решение:

Так как лед по условию «гладкий», то пренебрежем силой трения, действующей на коньки фигуриста. Сила нормальной реакции льда уравнивает сумму сил тяжести, действующих на фигуриста и кирпич, поэтому в процессе броска (до самого момента отпускания кирпича фигуристом) систему «фигурист + кирпич» можно считать замкнутой.

Отметим, что в системе отсчета, связанной со льдом, проекция скорости кирпича в момент отпускания на ось движения фигуриста равна $v + u$, и поэтому закон сохранения импульса в проекции на эту ось дает: $(M + m)v_0 = m(v + u) + Mv$, откуда следует,

$$\text{что } v = v_0 - \frac{m}{M + m} u = 1,2 \text{ м/с.}$$

Ответ: 1,2.

Задача 3 (4 балла) [закон сохранения импульса]

Снаряд массой $m=4,5$ кг, летевший горизонтально со скоростью $v=300$ м/с, взрывается. При взрыве образовалось два осколка, причем первый полетел вертикально вверх, и его

скорость сразу после взрыва равнялась $v_1 = 900 \text{ м/с}$. Второй осколок полетел в направлении под углом 45° к горизонту. Найдите массу первого осколка. Массой пороховых газов пренебречь. Ответ дайте в килограммах, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Взрыв происходит очень быстро, внутренние силы значительно превосходят внешние, и поэтому можно считать, что при взрыве сохраняется импульс. Так как массой пороховых газов можно пренебречь, то импульс снаряда до взрыва равен векторной сумме импульсов двух осколков после взрыва

Подсказка 2: Проекция импульса первого осколка на горизонталь (направление движения снаряда) равна нулю, а второго $\frac{1}{\sqrt{2}} m_2 v_2$.

Подсказка 3: Проекция импульса снаряда на вертикаль равна нулю, и поэтому второй осколок полетел вниз под углом 45° к горизонту.

Решение:

Взрыв происходит очень быстро, внутренние силы значительно превосходят внешние, и поэтому можно считать, что при взрыве сохраняется импульс. Так как массой пороховых газов можно пренебречь, то импульс снаряда до взрыва равен векторной сумме импульсов двух осколков после взрыва. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление движения снаряда (проекция импульса первого осколка на это направление

равна нулю): $mv = \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 v_2$ (здесь учтено, что импульс второго снаряда направлен под углом

45° к этой оси). Проекция импульса снаряда на вертикаль равна нулю, а первый осколок полетел вверх. Это означает, что второй осколок полетел вниз, и закон сохранения импульса

в проекции на вертикаль дает: $0 = m_1 v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 v_2$. Из этих двух соотношений находим, что

$$m_1 v_1 = mv \Leftrightarrow m_1 = \frac{v}{v_1} m = 1,5 \text{ кг.}$$

Ответ: 1,5.

Задача 4 (3 балла) [закон сохранения механической энергии, сила тяжести]

Маленький тяжелый шарик брошен под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Какой угол с горизонтом будет составлять вектор его скорости в тот момент, когда он достигнет половины максимальной высоты подъема? Соппротивлением воздуха пренебречь. Ответ запишите в градусах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: из закона сохранения механической энергии в любой точке траектории шарика $\frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_0^2}{2}$.

Подсказка 2: горизонтальная составляющая скорости остается неизменной и равной $v_0 \cos \alpha$.

Подсказка 3: в точке А на максимальной высоте подъема вертикальная компонента скорости равна нулю, и поэтому $v_A = v_0 \cos(\alpha)$, и поэтому $h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$.

Решение:

Из закона сохранения механической энергии в любой точке траектории шарика $\frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_0^2}{2}$. Поскольку горизонтальная составляющая скорости остается неизменной

и равной $v_0 \cos \alpha$, то в точке А на максимальной высоте подъема вертикальная компонента скорости равна нулю, и поэтому $v_A = v_0 \cos(\alpha)$, и поэтому закон сохранения энергии для

этой точки дает $h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$. Для точки В на половине максимальной высоты этот же

закон приводит к соотношению $v_B^2 + \frac{1}{2}v_0^2 \sin^2(\alpha) = v_0^2$. Значит, $v_B = v_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2(\alpha)}$.

Вспоминая о неизменности горизонтальной проекции скорости, находим, что искомый угол определяется из уравнения $\cos \beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{v}$, откуда получаем:

$$\cos(\beta) = \frac{\sqrt{2} \cos(\alpha)}{\sqrt{2 - \sin^2(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \beta \approx 35^\circ.$$

Ответ: 35.

Задача 5 (3 балла) [изменение механической энергии, сила трения]

Небольшую шайбу запустили вверх по наклонной плоскости, составляющей под углом 30° к горизонту, со скоростью $v_0 = 4 \text{ м/с}$. На какую максимальную высоту над точкой старта поднимется шайба, если коэффициент трения между шайбой и поверхностью $\mu = 0,5$? Ускорение свободного падения принять равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$, движение шайбы от старта до остановки считать поступательным. Ответ запишите в см.

Подсказка 1: Полная механическая энергия шайбы, равная сумме кинетической энергии и потенциальной энергии в поле тяжести Земли, убывает.

Подсказка 2: На максимальной высоте подъема скорость шайбы обращается в ноль.

Подсказка 3: Работа силы трения за время движения шайбы

$$A_{\text{тр}} = -\mu mg \frac{h_{\text{max}}}{\sin(30^\circ)} = -2\mu mgh_{\text{max}}.$$

Решение:

Сила трения не является потенциальной, и она совершает отрицательную работу. Поэтому полная механическая энергия шайбы, равная сумме кинетической энергии и потенциальной энергии в поле тяжести Земли, убывает. На максимальной высоте подъема скорость шайбы

обращается в ноль. Значит: $mgh_{\text{max}} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{\text{тр}} = -\mu mg \frac{h_{\text{max}}}{\sin(30^\circ)} = -2\mu mgh_{\text{max}}$. Из этого

соотношения находим $h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g(1+2\mu)} \approx 0,4 \text{ м}$. Отметим, что вместо синуса можно

использовать свойство прямоугольного треугольника с углом 30° : катет напротив этого угла в два раза меньше гипотенузы.

Ответ: 40.

Задача 6 (4 балла) [закон сохранения импульса, изменение механической энергии, сила трения]

Небольшой брусок массы $M = 795 \text{ г}$ покоился на горизонтальной шероховатой поверхности. При этом он был прикреплен к одному из концов легкой длинной пружины жесткостью $k = 20 \text{ Н/м}$. Второй конец пружины закреплен неподвижно, ось пружины проходит через центр масс бруска, пружина находилась в недеформированном состоянии. В брусок врезалась пуля массы $m = 5 \text{ г}$, летевшая горизонтально со скоростью $v_0 = 160 \text{ м/с}$ вдоль оси пружины, и застряла в нем. Какой путь пройдет брусок до остановки? Коэффициент трения между бруском и поверхностью равен $\mu = 0,375$. Ответ запишите в см. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Подсказка 1: при описании взаимодействия пули с бруском можно пренебречь силой трения и считать, что выполняется закон сохранения горизонтальной компоненты импульса и найти

из него начальную скорость движения бруска с застрявшей в нем пулей $V_0 = \frac{m}{M+m} v_0$.

Подсказка 2: при скольжении бруска механическая энергия уменьшается за счет работы силы трения, и при этом деформация пружины равна пройденному пути.

Подсказка 3: путь бруска до первой остановки удовлетворяет уравнению $s_1^2 + \frac{2\mu(M+m)g}{k}s_1 - \frac{(M+m)V_0^2}{k} = 0$.

Решение:

При описании взаимодействия пули с бруском (это очень быстрый процесс) можно пренебречь силой трения и считать, что выполняется закон сохранения горизонтальной компоненты импульса и найти из него начальную скорость движения бруска с застрявшей в нем пулей: $mv_0 = (M+m)V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{m}{M+m}v_0$.

При скольжении бруска механическая энергия уменьшается за счет работы силы трения, и при этом деформация пружины равна пройденному пути: скорость бруска V после прохождения пути s удовлетворяет соотношению $\frac{(M+m)V_0^2}{2} - \frac{(M+m)V^2}{2} - \frac{ks^2}{2} = \mu(M+m)gs$. Таким образом, путь до первой остановки бруска ($V=0$) удовлетворяет уравнению

$$s_1^2 + \frac{2\mu(M+m)g}{k}s_1 - \frac{(M+m)V_0^2}{k} = 0.$$

Выбирая физический (положительный) корень, находим:

$$s_1 = -\frac{\mu(M+m)g}{k} + \sqrt{\frac{\mu^2(M+m)^2g^2}{k^2} + \frac{(M+m)V_0^2}{k}} = 0,10 \text{ м.}$$

Ответ: 10.

Задача 7 (3 балла) [реактивное движение, реактивная сила]

Исследовательская ракета массой запущена на Луне вертикально вверх. Начальный запас топлива и окислителя у ракеты составлял 20% от полной массы ракеты в момент старта, и ракета полностью израсходовала его за время $t=25$ с, причем расход был равномерен. Скорость истечения продуктов сгорания топлива из сопла ракеты $u=560$ м/с, реактивная струя все время направлена вертикально вниз. Найдите ускорение ракеты непосредственно перед прекращением работы двигателя. Ускорение свободного падения на Луне считайте равным $g_{\text{Л}} \approx 1,6$ м/с². Ответ запишите в м/с², с точностью до целых.

Подсказка 1: Перед выключением двигателя на ракету действуют направленная вверх сила реактивной тяги $F_p = \frac{m}{t}u$ (где m – полная масса топлива и окислителя) и направленная вниз сила тяжести.

Подсказка 2: Искомое ускорение определяется на основании II закона Ньютона и равно $a = \frac{F_p - Mg_{\text{Л}}}{M}$.

Подсказка 3: Согласно условию, $\frac{m}{M+m} = 0,2 \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{4}$.

Решение:

Перед выключением двигателя на ракету действуют направленная вверх сила реактивной тяги $F_p = \frac{m}{t}u$ (где m – полная масса топлива и окислителя) и направленная вниз сила тяжести. К этому моменту масса ракеты уменьшилась на величину по сравнению со стартовой массой. Обозначим массу ракеты без топлива и окислителя M . Тогда искомое

ускорение определяется на основании II закона Ньютона и равно $a = \frac{F_p - Mg_{II}}{M} = \frac{m}{M} \frac{u}{t} - g_{II}$.

Согласно условию, $\frac{m}{M+m} = 0,2 \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{4}$. Итак, $a = \frac{u}{4t} - g_{II} \approx 4 \text{ м/с}^2$.

Ответ: 4.