

**10-11 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Робофест» по физике**

Набор задач для самостоятельного решения к вводному занятию «закон сохранения импульса».

Задача 1 (1 балл) [закон сохранения импульса]

Камень массой $m = 4$ кг падает со скоростью $v = 14$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали в тележку с песком общей массой $M = 36$ кг, и застревает в песке. До падения камня тележка покоилась на горизонтальных рельсах, а после падения покатила по ним, не подпрыгнув. Найти скорость качения тележки сразу после падения камня. Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Внешние силы, действующие на систему «тележка + камень» - сила тяжести и сила реакции рельсов – направлены вертикально.

Подсказка 2: Как видно из условия, вертикальная компонента импульса камня была поглощена при ударе, а горизонтальная перешла в импульс тележки с камнем.

Решение:

Как видно из условия, вертикальная компонента импульса камня была поглощена при ударе, а горизонтальная перешла в импульс тележки с камнем (внешние силы, действующие на систему «тележка + камень» - сила тяжести и сила реакции рельсов – направлены вертикально). Поэтому уравнение закона сохранения горизонтальной компоненты импульса

$$mv\sin(\alpha) = (M + m)V. \text{ Таким образом, искомая скорость } V = \frac{m}{M + m} v\sin(\alpha) = 0,7 \text{ м/с.}$$

Ответ: 0,7.

Задача 2 (1 балл) [закон сохранения импульса]

Фигурист массой $M = 57$ кг скользит, двигаясь прямолинейно по гладкому льду со скоростью $v_0 = 1,5$ м/с, держа в руках кирпич массой $m = 3$ кг. Внезапно он бросает кирпич по направлению своего движения, придав ему скорость $u = 6$ м/с относительно себя. С какой скоростью v он продолжит движение после броска? Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

Подсказка 1: Сила нормальной реакции льда уравнивает сумму сил тяжести, действующих на фигуриста и кирпич, поэтому в процессе броска (до самого момента отпускания кирпича фигуристом) систему «фигурист + кирпич» можно считать замкнутой.

Подсказка 2: В системе отсчета, связанной со льдом, проекция скорости кирпича в момент отпускания на ось движения фигуриста равна $v + u$.

Решение:

Так как лед по условию «гладкий», то пренебрежем силой трения, действующей на коньки фигуриста. Сила нормальной реакции льда уравнивает сумму сил тяжести, действующих на фигуриста и кирпич, поэтому в процессе броска (до самого момента отпускания кирпича фигуристом) систему «фигурист + кирпич» можно считать замкнутой. Отметим, что в системе отсчета, связанной со льдом, проекция скорости кирпича в момент отпускания на ось движения фигуриста равна $v_0 + u$, и поэтому закон сохранения импульса в проекции на эту ось дает:

$$(M + m)v_0 = m(v + u) + Mv, \text{ откуда следует,}$$

$$\text{что } v = v_0 - \frac{m}{M + m} u = 1,2 \text{ м/с.}$$

Ответ: 1,2.

Задача 3 (3 балла) [закон сохранения импульса]

Снаряд массой $m = 4,5$ кг, летевший горизонтально со скоростью $v = 300$ м/с, взрывается. При взрыве образовалось два осколка, причем первый полетел вертикально вверх, и его

скорость сразу после взрыва равнялась $v_1 = 900 \text{ м/с}$. Второй осколок полетел в направлении под углом 45° к горизонту. Найдите массу первого осколка. Массой пороховых газов пренебречь. Ответ дайте в килограммах, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Взрыв происходит очень быстро, внутренние силы значительно превосходят внешние, и поэтому можно считать, что при взрыве сохраняется импульс. Так как массой пороховых газов можно пренебречь, то импульс снаряда до взрыва равен векторной сумме импульсов двух осколков после взрыва

Подсказка 2: Проекция импульса первого осколка на горизонталь (направление движения снаряда) равна нулю, а второго $\frac{1}{\sqrt{2}} m_2 v_2$.

Подсказка 3: Проекция импульса снаряда на вертикаль равна нулю, и поэтому второй осколок полетел вниз под углом 45° к горизонту.

Решение:

Взрыв происходит очень быстро, внутренние силы значительно превосходят внешние, и поэтому можно считать, что при взрыве сохраняется импульс. Так как массой пороховых газов можно пренебречь, то импульс снаряда до взрыва равен векторной сумме импульсов двух осколков после взрыва. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление движения снаряда (проекция импульса первого осколка на это направление

равна нулю): $mv = \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 v_2$ (здесь учтено, что импульс второго снаряда направлен под углом

45° к этой оси). Проекция импульса снаряда на вертикаль равна нулю, а первый осколок полетел вверх. Это означает, что второй осколок полетел вниз, и закон сохранения импульса в проекции на вертикаль дает: $0 = m_1 v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 v_2$. Из этих двух соотношений находим, что

$$m_1 v_1 = mv \Leftrightarrow m_1 = \frac{v}{v_1} m = 1,5 \text{ кг.}$$

Ответ: 1,5.

Задача 4 (3 балла) [центр масс]

Три маленьких массивных шариков с массами $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ и $m_3 = 3m$, соединены невесомыми жесткими стержнями, длины которых $l_{12} = a$, $l_{23} = b$ и $l_{13} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Определите положение центра масс этой системы и найдите расстояние от шарика 2 до центра масс, если $a = 18 \text{ см}$ и $b = 8 \text{ см}$. Ответ запишите в см с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Удобно ввести декартову систему координат с центром в центре шарика 2 и осями, направленными к шарикам 1 и 3.

Подсказка 2: Координаты центра масс можно вычислить по формуле, с помощью которой он был определен: $\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Подсказка 3: Например, $X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{a}{6} = 3 \text{ см}$ (ось X направлена к шарiku 1).

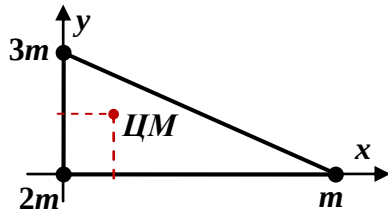
Решение:

Введем декартову систему координат с центром в центре шарика 2 и осями, направленными к шарикам 1 и 3 (см. рисунок). Координаты центра масс вычислим по формуле, с помощью

которой он был определен: $X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{a}{6} = 3 \text{ см}$ и

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{b}{2} = 4 \text{ см.}$$

Соответственно расстояние от шарика 2 до центра масс равно $l = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 9b^2}}{6} = 5 \text{ см.}$



Ответ: 5.

Задача 5 (4 балла) [изменение импульса, сила тяжести, центр масс]

Гантель изготовлена из легкого тонкого прочного стержня, на концах которого закреплены два одинаковых маленьких массивных шарика. Длина стержня равна $l = 10 \text{ см}$. Ее бросают с берегового обрыва в сторону моря таким образом, что в момент отпускания стержень был вертикален, нижний шарик имел нулевую скорость, а величина скорости верхнего равнялась $v_0 = 1,76 \text{ м/с}$. В этот момент нижний шарик находился на высоте $H = 40 \text{ м}$ над поверхностью моря. Какое количество оборотов совершит гантель до падения в море? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ запишите с точностью до целого значения.

Подсказка 1: В момент броска центр масс гантели (середина ее стержня) будет двигаться горизонтально со скоростью $\frac{v_0}{2}$, поэтому каждый из шариков движется относительно центра с такой же по величине скоростью.

Подсказка 2: Угловая скорость вращения гантели в момент броска $\omega_0 = \frac{v_0/2}{l/2} = \frac{v_0}{l}$.

Подсказка 3: Центр масс гантели будет двигаться по вертикали с постоянным ускорением g при нулевой начальной скорости.

Решение:

В момент броска центр масс гантели (середина ее стержня) будет двигаться горизонтально со скоростью $\frac{v_0}{2}$, поэтому каждый из шариков движется относительно центра с такой же по

величине скоростью, и угловая скорость вращения гантели $\omega_0 = \frac{v_0/2}{l/2} = \frac{v_0}{l}$. Единственная внешняя сила, действующая на гантель в описанных условиях – это сила тяжести. Поэтому центр масс гантели будет двигаться по вертикали с постоянным ускорением g от нулевой начальной скорости. В момент броска центр масс находится на 5 см выше нижнего шарика, а в момент удара гантели о поверхность моря центр масс будет находиться на высоте не более 5 см над этой поверхностью. Но так как 5 см намного меньше 40 м, этими смещениями

можно пренебречь и считать, что время падения гантели от броска до удара $t \approx \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Так

как сопротивлением воздуха пренебрегаем, а момент сил тяжести, действующих на гантель, равен нулю, то угловая скорость ее вращения в процессе падения изменяться не будет.

Следовательно, полный угол поворота гантели за время падения $\varphi \approx \frac{v_0}{l} \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Число

совершенных ею оборотов $N = \frac{\varphi}{2\pi} \approx \frac{v_0}{2\pi l} \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 8,003$. Итак, за время падения гантель совершит практически ровно 8 оборотов.

Ответ: 8.

Задача 6 (3 балла) [изменение импульса, сила тяжести, центр масс]

Гантель изготовлена из легкого тонкого прочного стержня, на концах которого закреплены два одинаковых маленьких массивных шарика. Длина стержня равна $l = 10$ см. Ее бросают с практически вертикального берегового обрыва в сторону моря таким образом, что в момент отпускания стержень был вертикален, нижний шарик имел нулевую скорость, а величина скорости верхнего равнялась $v_0 = 3,5$ м/с. В этот момент нижний шарик находился на высоте $H = 40$ м над поверхностью моря. На каком расстоянии от обрыва гантель упадет в море? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 9,8$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ запишите в метрах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: В момент броска центр масс гантели (середина ее стержня) будет двигаться горизонтально со скоростью $\frac{v_0}{2}$.

Подсказка 2: Центр масс гантели будет двигаться по вертикали с постоянным ускорением g при нулевой начальной скорости.

Подсказка 3: Центр масс гантели будет двигаться по горизонтали с постоянной скоростью.

Решение:

В момент броска центр масс гантели (середина ее стержня) будет двигаться горизонтально со скоростью $\frac{v_0}{2}$. Единственная внешняя сила, действующая на гантель в описанных условиях – это сила тяжести. Поэтому центр масс гантели будет двигаться по вертикали с постоянным ускорением g от нулевой начальной скорости. В момент броска центр масс находится на 5 см выше нижнего шарика, а в момент удара гантели о поверхность моря центр масс будет находиться на высоте не более 5 см над этой поверхностью. Но так как 5 см намного меньше 40 м, этими смещениями можно пренебречь и считать, что время падения гантели от броска до удара $t \approx \sqrt{\frac{2H}{g}}$. По горизонтали центр масс гантели движется с постоянной скоростью,

поэтому искомое расстояние $s = \frac{v_0}{2} t \approx v_0 \sqrt{\frac{H}{2g}} \approx 5$ м.

Ответ: 5.

Задача 7 (4 балла) [закон сохранения импульса, движение центра масс, центростремительное ускорение]

На гладкой горизонтальной поверхности лежат две маленькие шайбы с одинаковыми массами $m = 200$ г, соединенные легкой нерастяжимой нитью длиной $L = 60$ см, которая полностью расправлена, но не натянута. Еще одна шайба с такой же массой, двигавшаяся перпендикулярно нити со скоростью $v_0 = 2,4$ м/с, сталкивается с шайбой 1 «лоб в лоб» и прилипает к ней. После этого шайбы начали скользить по плоскости. Найдите величину силы натяжения нити через 2 с после удара. Ответ дайте в ньютонах, с точность до сотых

Подсказка 1: При соударении налетающей шайбы с шайбой 1 можно пренебречь силой натяжения нити (которая не успевает натянуться за малое время удара), а силы тяжести уравновешиваются силами реакции поверхности. Поэтому можно читать, что суммарный импульс этих шайб сохраняется.

Подсказка 2: Далее «слипшиеся» шайбы можно считать материальной точкой с массой $2m$, начальная скорость движения которой v определяется соотношением $mv_0 = 2mv$.

Подсказка 3: Центр масс системы «составная шайба + нить + шайба 2» движется с постоянной скоростью, и удобно перейти в инерциальную систему отсчета, связанную с ним.

Подсказка 4: В этой системе отсчета шайбы вращаются вокруг центра масс со скоростями

$$v_1 = \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{3} = \frac{v_0}{6} \text{ и } v_2 = \frac{1}{3}v_0 \text{ по окружностям с радиусами } r_1 = \frac{1}{3}L \text{ и } r_2 = \frac{2}{3}L.$$

Решение:

При соударении налетающей шайбы с шайбой 1 можно пренебречь силой натяжения нити (которая не успевает натянуться за малое время удара), а силы тяжести уравниваются силами реакции поверхности. Поэтому можно читать, что суммарный импульс этих шайб

сохраняется: $mv_0 = 2mv \Rightarrow v = \frac{v_0}{2}$. Далее «слипшиеся» шайбы можно считать материальной

точкой с массой $2m$. В момент начала движения механической системы «составная шайба + нить + шайба 2» ее импульс равен $\vec{P} = 2m\vec{v} = m\vec{v}_0$. Центр масс этой системы находится

между шайбами, на расстоянии $\frac{2m}{2m+m}L = \frac{2}{3}L$ от шайбы 2 (и на расстоянии $\frac{m}{2m+m}L = \frac{1}{3}L$

от «составной» шайбы). Скорость центра масс в начале движения $\vec{V} = \frac{\vec{P}}{3m} = \frac{1}{3}\vec{v}_0$. Внешними

силами, действующими на эту систему, являются силы тяжести и силы нормальной реакции поверхности, направленные вертикально. По условию шайбы не двигаются по вертикали, так что сумма этих сил должна быть равна нулю, и импульс системы, а вместе с ним и скорость ее центра масс, не будут изменяться. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс системы (обратим внимание, что она инерциальная, так как движется относительно исходной с постоянной скоростью). В этой системе отсчета шайбы вращаются вокруг центра масс со

скоростями $v_1 = \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{3} = \frac{v_0}{6}$ и $v_2 = \frac{1}{3}v_0$ по окружностям с радиусами $r_1 = \frac{1}{3}L$ и $r_2 = \frac{2}{3}L$.

Нить остается натянутой, а общая угловая скорость вращения шайб $\omega = \frac{v_0}{2L}$.

Центростремительные ускорения шайб в этой системе отсчета создаются силой натяжения

нити, то есть $T = 2m\omega^2 r_1 = \frac{mv_0^2}{6L} = 0,32\text{Н}$. Эта величина постоянна, так что и в заданный

момент времени величина силы натяжения будет именно такой.

Ответ: 0,32.

Задача 8 (3 балла) [реактивное движения, реактивная сила]

Исследовательская ракета массой запущена на Луне вертикально вверх. Начальный запас топлива и окислителя у ракеты составлял 20% от полной массы ракеты в момент старта, и ракета полностью израсходовала его за время $t = 25\text{с}$, причем расход был равномерен. Скорость истечения продуктов сгорания топлива из сопла ракеты $u = 560\text{м/с}$, реактивная струя все время направлена вертикально вниз. Найдите ускорение ракеты непосредственно перед прекращением работы двигателя. Ускорение свободного падения на Луне считайте равным $g_L \approx 1,6\text{м/с}^2$. Ответ запишите в м/с^2 , с точностью до целых.

Подсказка 1: Перед выключением двигателя на ракету действуют направленная вверх сила

реактивной тяги $F_p = \frac{m}{t}u$ (где m – полная масса топлива и окислителя) и направленная

вниз сила тяжести.

Подсказка 2: Искомое ускорение определяется на основании II закона Ньютона и равно

$$a = \frac{F_p - Mg_{\text{Л}}}{M}.$$

Подсказка 3: Согласно условию, $\frac{m}{M+m} = 0,2 \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{4}$.

Решение:

Перед выключением двигателя на ракету действуют направленная вверх сила реактивной тяги $F_p = \frac{m}{t}u$ (где m – полная масса топлива и окислителя) и направленная вниз сила тяжести. К этому моменту масса ракеты уменьшилась на величину по сравнению со стартовой массой. Обозначим массу ракеты без топлива и окислителя M . Тогда искомое ускорение определяется на основании II закона Ньютона и равно $a = \frac{F_p - Mg_{\text{Л}}}{M} = \frac{m}{M} \frac{u}{t} - g_{\text{Л}}$.

Согласно условию, $\frac{m}{M+m} = 0,2 \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{4}$. Итак, $a = \frac{u}{4t} - g_{\text{Л}} \approx 4 \text{ м/с}^2$.

Ответ: 4.