10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задачи к итоговому занятию основного курса.

Тема: «ПОДГОТОВКА К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ ТУРУ ФИНАЛЬНОГО ЭТАПА».

Задание 1.1.

Шайба массы m, скользящая по гладкой горизонтальной поверхности, стакивается с покоящейся шайбой массы M. Происходит упругий удар. При каком отношении масс $n = \frac{M}{m}$ угол разлета шайб после удара может равняться 90°? Ответ запишите с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Из закона сохранения энергии следует, что скорости шайб после удара связаны со скоростью налетающей шайбы соотношением $v_0^2 = v^2 + nV^2$.

Подсказка 2: Закон сохранения импульса дает $\vec{v}_0 = \vec{v} + n\vec{V}$.

Подсказка 3: Скалярное произведение $\vec{v} \cdot \vec{V} = vV\cos(90°) = 0$.

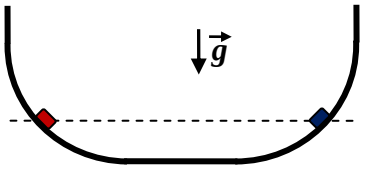
Решение:

Пусть v_0 – скорость налетающей шайбы. Закон сохранения энергии дает $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}$, ($v$ и V – скорости после удара), откуда $v_0^2 = v^2 + nV^2$. Закон сохранения импульса $m\vec{v}_0 = m\vec{v} + M\vec{V}$ приводит к соотношению $\vec{v}_0 = \vec{v} + n\vec{V}$. Если возвести его скалярно в квадрат и учесть, что $\vec{v} \cdot \vec{V} = vV\cos(90°) = 0$, то получим: $v_0^2 = v^2 + n^2V^2$. После вычитания двух полученных соотношений приходим к равенству $n(n-1)V^2 = 0$. Ясно, что в результате удара покоящаяся шайба придет в движение ($V \neq 0$) и что ее масса не должна равняться нулю ($n \neq 0$). Поэтому должно быть $n = 1$.

ОТВЕТ: 1.

Задание 1.2

Две маленькие шайбы разных масс m и M отпускают без начальных скоростей с одинаковой высоты $h = 15$см в яме с гладкими стенками (форма которых – четверть цилиндра с вертикальным продолжением сверху), гладко переходящими в гладкое горизонтальное дно (см. рисунок). На горизонтальном дне ямы произошел упругий лобовой удар, в результате которого шайба массы остановилась M. На какую максимальную высоту может подняться по стене ямы шайба массы m (высота стенки больше этой высоты)? Ответ запишите в см с точностью до целого числа.



Подсказка 1: Из закона сохранения механической энергии следует, что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$, направленными навстречу друг другу.

Подсказка 2: Из закона сохранения импульса следует, что скорость шайбы с массой m после удара $v = \frac{M-m}{m} v_0$.

Подсказка 3: Закон сохранения энергии для соударения шайб $\frac{Mv_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = 0 + \frac{mv^2}{2}$ позволяет найти соотношение масс шайб.

Решение:

Ясно (из закона сохранения механической энергии), что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$, направленными навстречу друг другу. Закон сохранения импульса с учетом данных условия записывается в виде: $Mv_0 - mv_0 = 0 + mv$. Поэтому скорость шайбы с массой m после удара $v = \frac{M-m}{m} v_0$. Закон сохранения энергии для соударения шайб $\frac{Mv_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = 0 + \frac{mv^2}{2}$, откуда $(M+m)v_0^2 = mv^2$. Подставив сюда полученное для v значение, находим, что $m(M+m) = (M-m)^2$. Значит, $M(M-3m) = 0$, и соотношение масс шайб определено: $M = 3m$. В соответствии с полученным ранее выражением для скорости, $v = 2v_0$. Легкая шайба с этой скоростью заезжает на стенку, и из закона сохранения энергии $mgh_{\max} = \frac{mv^2}{2} = 2mv_0^2$. Окончательно $h_{\max} = \frac{2v_0^2}{g} = 4h = 60$ см.

ОТВЕТ: 60.

Задание 2.1

В изолированном сосуде находится влажный воздух с относительной влажностью 30% при комнатной температуре. Воздух немного нагревают. Что произойдет с относительной влажностью? В ответе напишите 1, если считаете, что она уменьшится, 2 – если считаете, что останется неизменной, и 3 – если считаете, что она увеличится.

Подсказка 1: Давление водяного пара, находящегося в газообразном состоянии, можно выразить из уравнения Менделеева-Клапейрона через массу пара и объем сосуда $p = \frac{mRT}{\mu V}$.

Подсказка 2: В диапазоне «комнатных» температур давление насыщенного водяного пара растет заметно быстрее роста абсолютной температуры.

Решение:

Давление водяного пара, находящегося в газообразном состоянии, можно выразить из уравнения Менделеева-Клапейрона через массу пара и объем сосуда $p = \frac{mRT}{\mu V}$. Значит, относительная влажность $r \equiv \frac{p}{p_н(T)} = \frac{mR}{\mu V} \frac{T}{p_н(T)}$. Первый множитель – постоянная в условиях данной задачи, а в диапазоне «комнатных» температур давление насыщенного водяного пара растет заметно быстрее роста абсолютной температуры. Поэтому относительная влажность уменьшится.

ОТВЕТ: 1.

Задание 2.2

В изолированном помещении воздух был очень сухим, и для создания более комфортных условий включили увлажнитель воздуха, испаряющий воду с постоянным расходом (то есть за единицу времени он испаряет некоторое постоянное количество воды). Затем для контроля включили электронный гигрометр, измеряющий относительную влажность воздуха. Через 1 мин гигрометр показал 15% , через 6 минут – уже 30%. Какой станет относительная влажность воздуха через 10 минут (увлажнитель воздуха все это время работал)? Температура воздуха в помещении поддерживается постоянной. Ответ записать в процентах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: .
Подсказка 2: .
Подсказка 3: .

Решение:

Ясно, что масса водяного пара в воздухе при работе такого увлажнителя растет линейно с течением времени: $m(t) = m_0 + \alpha \cdot t$. Давление водяного пара, находящегося в газообразном состоянии, можно выразить из уравнения Менделеева-Клапейрона через массу пара и объем помещения $p = \dfrac{mRT}{\mu V}$. Значит, относительная влажность $r(t) \equiv \dfrac{p}{p_н(T)} = \dfrac{m(t)RT}{\mu V p_н(T)}$. Таким образом, относительная влажность тоже растет со временем по линейному закону: $r(t) = \dfrac{m_0 RT}{\mu V p_н(T)} + \dfrac{\alpha RT}{\mu V p_н(T)} t \equiv a + b \cdot t$. Из соотношений для значений в заданные моменты времени находим:

$$\begin{Bmatrix} r_1 = a + b \cdot t_1 \\ r_2 = a + b \cdot t_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{r_1 t_2 - r_2 t_1}{t_2 - t_1} \\ b = \dfrac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \end{cases}.$$

Следовательно, $r_3 = a + b \cdot t_3 = \dfrac{r_1 t_2 - r_2 t_1 + (r_2 - r_1) t_3}{t_2 - t_1} = 0{,}66$.

ОТВЕТ: 66.

Задание 3.1

По трубе постоянного сечения $S = 6\,\text{см}^2$ к крану подается вода, которая наполняет бак емкостью $V = 90$л за время $t = 60$с. С какой скоростью движется вода по трубе? Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых, без указания единиц измерения.

Подсказка 1: Расход воды для данного крана $q = \dfrac{V}{t}$.

Подсказка 2: С другой стороны, $q = vS$.

Решение:

Расход воды для данного крана $q = vS = \frac{V}{t}$. Следовательно, скорость движения воды по трубе $v = \frac{V}{St} = 2{,}5$ м/с.

ОТВЕТ: 2,5.

Задание 3.2

Вода подается по трубке со скоростью $v_0 = 3{,}5$ м/с. Конец трубки находится на высоте $h = 10$ см над горизонтальной поверхностью земли, а угол наклона вылета струи к горизонту α выбран так, чтобы струя попадала в небольшой камешек, лежащий на земле на расстоянии $l = 1{,}25$ м <u>по горизонтали</u> от конца трубки, проходя по самой высокой из возможных траекторий. Пренебрегая силой сопротивления воздуха и вязким трением в жидкости, найдите α. Ускорение свободного падения при выполнении данного задания считать равным $g = 9{,}8$ м/с^2. Ответ дайте в градусах, с точностью до целого значения, без указания единиц измерения.

Подсказка 1: В системе координат, в которой ось x направлена горизонтально, ось y – вертикально, а начало координат совмещено с концом трубки, закон движения порции воды $x(t) = v_0 \cos(\alpha) t$ и $y(t) = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2}$.

Подсказка 2: Уравнение траектории $y(x) = \mathrm{tg}(\alpha) x - \frac{g x^2}{2 v_0^2}[1 + \mathrm{tg}^2(\alpha)]$.

Подсказка 3: Уравнение для величины $z = \mathrm{tg}(\alpha)$: $z^2 - 2\frac{v_0^2}{gl} z + 1 - \frac{2hv_0^2}{gl^2} = 0$.

Решение:

Введем систему координат, в которой ось x направлена горизонтально, ось y – вертикально, а начало координат совмещено с концом трубки. Закон движения порции воды в этой системе координат позволяет найти уравнение ее траектории:

$$\left\{\begin{array}{c} x(t) = v_0 \cos(\alpha) t \\ y(t) = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = \mathrm{tg}(\alpha) \cdot x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} = \mathrm{tg}(\alpha) x - \frac{g x^2}{2 v_0^2}[1 + \mathrm{tg}^2(\alpha)].$$

Для точки падения $-h = l \cdot \mathrm{tg}(\alpha) - \frac{g l^2}{2 v_0^2}[1 + \mathrm{tg}^2(\alpha)]$, и мы получаем уравнение для величины $z = \mathrm{tg}(\alpha)$: $z^2 - 2\frac{v_0^2}{gl} z + 1 - \frac{2hv_0^2}{gl^2} = 0$. Возможны две траектории, но нам нужна более высокая.

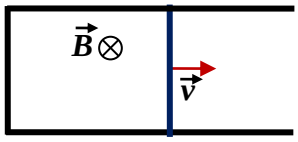
Поэтому $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{v_0^2}{gl} + \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 l^2} + \frac{2hv_0^2}{gl^2} - 1} = \frac{7}{5}$. Значит, $\alpha = arctg\left(\frac{4}{3}\right) \approx 54°$.

ОТВЕТ: 54.

Задание 4.1

Проводящая перемычка скользит по П-образной шине поступательно, оставаясь перпендикулярной двум ее сторонам (см. рисунок). Скорость перемычки $v = 3$ м/с, ее длина

$l = 50$ см. В пространстве расположения шины создано однородное магнитное поле с индукцией $B = 20$ мТл, перпендикулярной плоскости шины. Найдите величину ЭДС индукции, возникающей в перемычке. Ответ запишите в мВ, с точностью до целого значения.



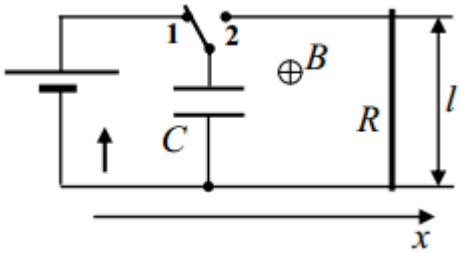
Подсказка 1: При движении перемычки изменяется площадь контура $S = l \cdot x$, образованного шиной и перемычкой.
Подсказка 2: Следовательно, изменяется магнитный поток $\Phi = Bl \cdot x = Blv \cdot t$, и возникает ЭДС индукции, величина которой равна $\mathcal{E}_i = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$.

Решение:

При движении перемычки изменяется площадь контура $S = l \cdot x$, образованного шиной и перемычкой. Поэтому изменяется магнитный поток через этот контур, и в нем появляется ЭДС индукции, равная по величине $\mathcal{E}_i = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = Bl\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = Blv = 30$ мВ.

ОТВЕТ: 30.

Задание 4.2
В схеме, показанной на рисунке, ключ некоторое время находился в положении 1. Найти заряд конденсатора спустя достаточно большое время после того, как ключ быстро перевели в положение 2. Перемычка массой $m = 34$ г с длиной $l = 50$ см может скользить по длинным горизонтальным шинам поступательно, без трения. ЭДС источника равна $\mathcal{E} = 50$ В, сопротивление шин много меньше сопротивления перемычки. Магнитное поле с индукцией $B = 4$ Тл однородно и направлено вертикально. Емкость конденсатора $C = 1$ мФ. Ответ запишите в милликулонах, с точностью до целого значения, без указания единиц.



Подсказка 1: После перевода ключа конденсатор разряжается через перемычку, и она разгоняется за счет силы Ампера: $m\frac{dv_x}{dt} = BlI$.
Подсказка 2: При движении перемычки изменяется магнитный поток через контур разрядки, и в нем появляется ЭДС индукции, равная $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv_x$, которая уменьшает ток через перемычку.
Подсказка 3: Разрядка конденсатора прекращается (а скорость перемычки перестает изменяться) при прекращении тока, то есть тогда, когда ЭДС индукции уравновесит напряжение на конденсаторе.
Подсказка 4: Малое изменение заряда конденсатора $dq = -Idt$ можно выразить через малое изменение скорости перемычки с помощью соотношения из подсказки 1.

Решение:

До перевода ключа конденсатор зарядился до напряжения, равного ЭДС, и поэтому его заряд сразу после перевода ключа $q_0 = C\mathcal{E}$. Далее конденсатор начнет разряжаться через перемычку, поэтому на нее начнет действовать сила Ампера, и перемычка придет в движение (в направлении оси x). При движении перемычки изменяется магнитный поток через контур разрядки, и в нем появляется ЭДС индукции, равная $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv_x$. Пусть R – сопротивление перемычки. Запишем уравнение, определяющее ток через перемычку $I = \frac{1}{R}\left[\frac{q}{C} - Blv_x\right]$ и уравнение движения перемычки $m\frac{dv_x}{dt} = BlI = \frac{Bl}{R}\left[\frac{q}{C} - Blv_x\right]$. Учтем также, что $\frac{dq}{dt} = -I$. Из этих соотношений видно, что разрядка конденсатора прекращается (а скорость перемычки перестает изменяться) при $\frac{q}{C} - Blv_x = 0$. Кроме того, из этих соотношений следует, что $dq = -Idt = -\frac{m}{Bl}dv_x$. Суммируя малые приращения dq и в этом уравнении от старта до времени, когда уже установился стационарный режим (когда заряд и скорость равны установившимся значениям $q \approx \bar{q}$, $v_x \approx \bar{v}$), получаем:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\bar{q}}{C} - Bl\bar{v} = 0 \\ \bar{q} - C\mathcal{E} = -\frac{m}{Bl}(\bar{v} - 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \bar{q} = \frac{B^2l^2C^2\mathcal{E}}{m + B^2l^2C} \\ \bar{v} = \frac{BlC\mathcal{E}}{m + B^2l^2C} \end{array}\right. .$$

Таким образом, вместе с установившимся зарядом конденсатора мы нашли и установившуюся скорость движения перемычки. Окончательный ответ $\bar{q} = \frac{B^2l^2C^2\mathcal{E}}{m + B^2l^2C} = 16$мКл.

ОТВЕТ: 16.