

11 класс, Экспресс-подготовка к ЕГЭ по физике

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 8.

Темы: гармонические колебания.

Задача 1 (2 балла) [гармонические колебания, пружинный маятник]

Груз массой 1 кг, закрепленный на пружине с жесткостью 400 Н/м, совершает гармонические колебания. Максимальная величина ускорения груза в процессе колебаний равна 8 м/с^2 . Какова максимальная величина скорости груза? Ответ запишите в м/с, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Максимальное ускорение груз испытывает в момент максимума возвращающей

силы, то есть при максимальном отклонении: $a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m} = \frac{k}{m} x_{\max}$.

Подсказка 2: Максимальная скорость достигается в момент прохождения равновесия, когда вся энергия колебаний становится кинетической энергией груза, которая также равна максимальной потенциальной энергии при максимальном отклонении.

Решение:

Максимальное ускорение груз испытывает в момент максимума возвращающей силы, то есть

при максимальном отклонении: $a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m} = \frac{k}{m} x_{\max}$. Максимальная скорость достигается в

момент прохождения равновесия, когда вся энергия колебаний становится кинетической энергией груза $\frac{mv_{\max}^2}{2}$, которая также равна максимальной потенциальной энергии при

максимальном отклонении: $\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{kx_{\max}^2}{2} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} x_{\max}$. Следовательно,

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k}} a_{\max} = 0,4 \text{ м/с}.$$

Ответ: 0,4.

Задача 2 (2 балла) [гармонические колебания, пружинный маятник]

Небольшой груз, который может скользить без трения по горизонтальной направляющей, прикреплен к концу легкой пружины, второй конец которой закреплен. Груз стартует из положения, в котором пружина растянута на $\Delta l_0 = 4 \text{ см}$, со скоростью $v_0 = 0,3 \text{ м/с}$. Период колебаний оказался равен $T \approx 0,628 \text{ с}$. Какова будет амплитуда колебаний груза? Сопротивление воздуха и трение пренебрежимо малы. Ответ приведите в см, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: В ходе колебаний пружинного маятника сохраняется полная механическая энергия, равная сумме кинетической энергии груза и потенциальной энергии

деформированной пружины $\frac{mv_x^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \text{const} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{k(\Delta l_0)^2}{2}$.

Подсказка 2: В момент максимального растяжения (или сжатия) пружины скорость обращается в ноль, поэтому вся энергия становится энергией деформированной пружины

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{k(\Delta l_0)^2}{2} = \frac{k(x_m)^2}{2}.$$

Решение:

Здесь проще анализировать не движение, а превращения энергии. В ходе колебаний пружинного маятника сохраняется полная механическая энергия, равная сумме кинетической энергии груза и потенциальной энергии деформированной пружины

$$\frac{mv_x^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{2} = E = \text{const}. \text{ Величину полной энергии можно вычислить по начальным}$$

условиям $E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{k(\Delta l_0)^2}{2}$. В момент максимального растяжения (или сжатия) пружины скорость обращается в ноль, поэтому вся энергия становится энергией деформированной пружины $\frac{mv_0^2}{2} + \frac{k(\Delta l_0)^2}{2} = \frac{k(\Delta l_m)^2}{2}$. Так как положению равновесия в заданных условиях отвечает $\Delta l = 0$, то амплитуда колебаний груза – это и есть величина максимальной деформации пружины. Значит, $x_m = |\Delta l_m| = \sqrt{(\Delta l_0)^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$. Период пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, то есть $\frac{m}{k} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$ и $x_m = \sqrt{(\Delta l_0)^2 + \left(\frac{Tv_0}{2\pi}\right)^2} \approx 5 \text{ см}$.

Ответ: 5.

Задача 3 (2 балла) [гармонические колебания, математический маятник]

Шарик на длинной легкой нерастяжимой нити совершает колебания. Максимальная потенциальная энергия шарика в поле тяжести, если ее считать равной нулю в положении равновесия, равна 0,8 Дж. Максимальная скорость шарика в процессе колебаний равна 2 м/с. Чему равна масса шарика? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ запишите в граммах.

Подсказка 1: В процессе колебаний потенциальная энергия шарика в поле тяжести переходит в его кинетическую энергию и обратно, причем их сумма остается неизменной.

Подсказка 2: Максимальная кинетическая энергия достигается при прохождении равновесия, а максимальная потенциальная – в момент остановки.

Решение:

Поскольку сопротивление воздуха отсутствует, то полная механическая энергия сохраняется. В процессе колебаний потенциальная энергия шарика в поле тяжести переходит в его кинетическую энергию и обратно. Максимальная кинетическая энергия, равная $\frac{mv_{\max}^2}{2}$, достигается при прохождении равновесия, а максимальная потенциальная ($E = 0,8 \text{ Дж}$) – в момент остановки. Поэтому $\frac{mv_{\max}^2}{2} = E \Rightarrow m = \frac{2E}{v_{\max}^2} = 0,4 \text{ кг}$.

Ответ: 400.

Задача 4 (3 балла) [пружинный маятник, потенциальная энергия]

Как известно, **потенциальная энергия** в механике всегда определяется с точностью до постоянной величины, поскольку физический смысл имеет только ее изменение, равное взятой со знаком минус работе сил по перемещению тела: $E_{\text{ном}}(2) - E_{\text{ном}}(1) = -A_{12}$. Поэтому мы обычно **калибруем** потенциальную энергию, то есть указываем, в какой точке она принимается равной нулю. Рассмотрите груз массы $m = 0,1 \text{ кг}$, подвешенный на невесомой вертикальной пружине жесткостью $k = 20 \text{ Н/м}$ в однородном поле тяжести $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Получите формулу для потенциальной энергии системы, равной сумме потенциальной энергии груза в поле тяжести и энергии деформированной пружины. При этом *откалибруйте* это выражение таким образом, чтобы полная потенциальная энергии системы равнялась нулю в положении равновесия груза и запишите ее как функцию координаты x , отсчитываемой от этого же положения. Вычислите величину полной потенциальной энергии при $x = 10 \text{ см}$. Ответ запишите в джоулях, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Полная потенциальная энергия системы $E_{\text{ном}} = mgh + \frac{k(\Delta l)^2}{2}$, где h – высота положения тела над «нулевым» уровнем (можно сразу договориться совместить этот уровень с уровнем положения равновесия груза), а Δl – деформация пружины.

Подсказка 2: В положении равновесия груза сила упругости пружины уравнивает силу тяжести, поэтому пружина в этом положении растянута на величину $\Delta l_0 = +\frac{mg}{k}$.

Подсказка 3: Если направить координатную ось x вертикально вверх, отсчитывая координату x как было задано в условии (от положения равновесия), то при нахождении груза в точке с координатой x высота $h = x$, а деформация пружины $\Delta l = \frac{mg}{k} - x$.

Решение:

Полная потенциальная энергия системы $E_{\text{ном}} = mgh + \frac{k(\Delta l)^2}{2}$, где h – высота положения тела над «нулевым» уровнем (сразу договоримся совместить этот уровень с уровнем положения равновесия груза), а Δl – деформация пружины. Отметим, что в положении равновесия груза сила упругости пружины уравнивает силу тяжести, поэтому пружина в этом положении растянута на величину $\Delta l_0 = +\frac{mg}{k}$. Направим координатную ось x

вертикально вверх, отсчитывая координату x как было задано в условии – от положения равновесия. Тогда при нахождении груза в точке с координатой x высота $h = x$, а деформация пружины $\Delta l = \frac{mg}{k} - x$. Полная потенциальная энергия (пока не

откалиброванная) $E_{\text{ном}} = mgx + \frac{k}{2} \left(\frac{mg}{k} - x \right)^2 = \frac{m^2 g^2}{2k} + \frac{kx^2}{2}$. Для калибровки нужно вычесть

из этого выражение значение данной функции в нуле: $\tilde{E}_{\text{ном}}(x) \equiv E_{\text{ном}}(x) - E_{\text{ном}}(0) = \frac{kx^2}{2}$, и

при $x = 10\text{см}$ она равна $\tilde{E}_{\text{ном}} = \frac{kx^2}{2} = 0,1\text{Дж}$. Мы обнаружили замечательное обстоятельство:

если отсчитывать координату пружинного маятника от положения равновесия и калибровать полную потенциальную энергию маятника так, чтобы она равнялась нулю в этом положении,

то формула для полной потенциальной энергии – **всегда** $\tilde{E}_{\text{ном}}(x) = \frac{kx^2}{2}$, даже если на груз

действует еще какая-нибудь постоянная сила! На самом деле это справедливо для любой системы, совершающей гармонические колебания.

Ответ: 0,1.

Задача 5 (4 балла) [Гармонические колебания, математический маятник]

Небольшой груз совершает вертикальные колебания на легкой пружине с периодом $T = 2\text{с}$ и амплитудой $A = 3\text{см}$. В момент прохождения крайнего верхнего положения груза на него сверху падает шарик из размягченного металла, который тут же «приваривается» к грузу. Масса шарика составляет 20% от массы груза, а его скорость перед ударом равнялась $v = 0,5\text{м/с}$. Какой стала амплитуда колебаний груза? Ответ запишите в см, округлив до сотых.

Подсказка 1: В момент максимального отклонения груза его скорость равна нулю, и поэтому скорость «нового» груза после абсолютно неупругого удара, определяется из уравнения закона сохранения импульса.

Подсказка 2: Полная механическая энергия «нового» груза равна его потенциальной энергии в момент наибольшего отклонения $\frac{k\tilde{A}^2}{2}$, где $\tilde{A}$ – искомая новая амплитуда.

Подсказка 3: Период колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Решение:

В момент максимального отклонения груза его скорость равна нулю, и поэтому скорость «нового» груза после абсолютно неупругого удара, согласно закону сохранения импульса, определяется из уравнения $0,2mv = 1,2mV \Rightarrow V = \frac{v}{6}$. Полная механическая энергия «нового»

груза $E = \frac{kA^2}{2} + \frac{1,2mV^2}{2} = \frac{kA^2}{2} + \frac{mv^2}{60}$ равна его потенциальной энергии в момент наибольшего отклонения $\frac{k\tilde{A}^2}{2}$, где $\tilde{A}$ – искомая новая амплитуда. Поэтому

$\tilde{A} = \sqrt{A^2 + \frac{1}{30} \frac{m}{k} v^2}$. Период колебаний пружинного маятника $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, и в результате

приходим к соотношению $\tilde{A} = \sqrt{A^2 + \frac{1}{120\pi^2} v^2 T^2} \approx 4,18 \text{ см}$.

Задача 6 (4 балла) [сила трения, пружинный маятник, гармонические колебания]

Доска массы $M = 500 \text{ г}$ находится на гладкой горизонтальной поверхности. На доске лежит груз массы $m = 100 \text{ г}$, прикрепленный к неподвижной стенке легкой пружины жесткости $k = 15 \text{ Н/м}$. Ось пружины горизонтальна, коэффициент трения между доской и грузом равен $\mu = 0,4$. Найти максимальную амплитуду гармонических колебаний груза на пружине. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Ответ выразить в миллиметрах, округлив до целых.

Подсказка 1: гармоничность колебаний нарушается, когда груз начинает скользить по доске.

Подсказка 2: пока проскальзывания нет, уравнение движения доски с грузом

$$(M + m)a_x = -kx \Rightarrow x'' + \frac{k}{M + m}x = 0.$$

Подсказка 3: ускорение доски создается силой трения со стороны груза, который прижат к доске силой тяжести, то есть $Ma_m = M\omega^2 x_m \leq \mu mg$.

Решение:

Начнем с определения причины нарушения гармоничности. Пока груз не скользит по доске, они вместе совершают гармонические колебания, но после того, как начинается проскальзывание, механическая энергия переходит в тепло, и колебания начинают затухать, а следовательно – перестают быть гармоническими. Пока проскальзывания нет, уравнение

движения доски с грузом $(M + m)a_x = -kx \Rightarrow x'' + \frac{k}{M + m}x = 0$, и гармонические колебания

происходят с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}}$. Если амплитуда колебаний равна x_m , то

амплитуда изменения ускорения $a_m = \omega^2 x_m = \frac{kx_m}{M + m}$. Ускорение доски создается силой

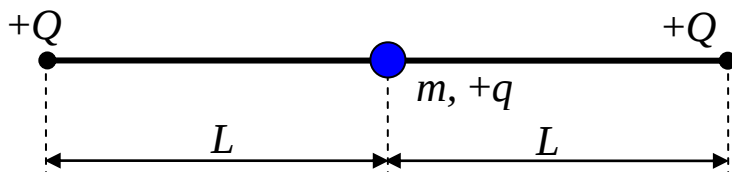
трения со стороны груза, который прижат к доске силой тяжести. Поскольку в отсутствие проскальзывания должно быть $|F_{mp}| \leq \mu N$, то $Ma_m \leq \mu mg \Rightarrow x_m \leq \frac{\mu m(M + m)g}{Mk} \approx 32 \text{ мм}$.

Ответ: 32.

Задача 7 (4 балла) [электростатическое взаимодействие, малые колебания, уравнение гармонических колебаний]

По гладкому горизонтальному неподвижному непроводящему стержню длиной $2L$ может свободно скользить небольшая бусинка массой m с зарядом $q > 0$. На концах стержня закреплены одинаковые точечные заряды $Q > 0$ (см. рисунок). При малом отклонении бусинки от начального положения возникли колебания с периодом T_0 . Во сколько раз

изменится период малых колебаний бусинки, если величину заряда бусинки уменьшить в 4 раза? Излучением пренебречь.



Подсказка 1: в точке с координатой x , отсчитываемой вдоль направляющей от начального положения, бусинка будет находиться на расстояниях $r_1 = r_2 = \sqrt{L^2 + x^2}$ от закрепленных зарядов.

Подсказка 2: проекция на ось x суммарной силы взаимодействия бусинки с закрепленными

зарядами $F_x = -q \cdot 2 \frac{kQ}{L^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}}$.

Подсказка 3: уравнение малых колебаний бусинки приводится к виду уравнения гармонических колебаний $x'' + \frac{2kqQx}{mL^3} = 0$.

Решение:

Направим координатную ось x по линии движения бусинки, совместив начало координат с точкой равновесия. При смещении на x от положения равновесия сила отталкивания от зарядов будет возвращать ее в исходное положение. Так как расстояния до зарядов в случае отклонения будут равны $r_1 = L - x$ и $r_2 = L + x$, то возвращающая сила

$$F_x = -\frac{kQq}{(L-x)^2} + \frac{kQq}{(L+x)^2} = -\frac{4kQq}{(L^2 - x^2)^2} Lx.$$

Конечно, эта сила не является линейной по x в

общем случае, но для малых $x \ll L$ $F_x \approx -\frac{4kqQx}{L^3}$, и в результате уравнение малых

колебаний бусинки $ma_x = F_x$ приводится к виду уравнения гармонических колебаний

$$x'' + \frac{4kqQx}{mL^3} = 0.$$

Таким образом, период малых колебаний бусинки $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \pi L \sqrt{\frac{mL}{kqQ}}$.

Поэтому при уменьшении q в 4 раза период колебаний увеличится в два раза.

Ответ: 2.

Задача 8 (3 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]

В идеальном колебательном контуре, содержащем источник ЭДС (см. рисунок 2), происходят гармонические колебания. На графиках представлены зависимости от времени заряда конденсатора, силы тока, возникающей в катушке ЭДС индукции, энергии магнитного поля в катушке. Сопротивлением всех элементов контура можно пренебречь. Известно, что на приведенных графиках изображены зависимости от времени четырех величин: силы тока в контуре, заряда конденсатора, Энергии магнитного поля в катушке и ЭДС индукции в катушке. Выберите два верных утверждения из приведенных ниже. В качестве ответа укажите номера верных утверждений, не разделяя их пробелами или знаками препинания (например: 12).

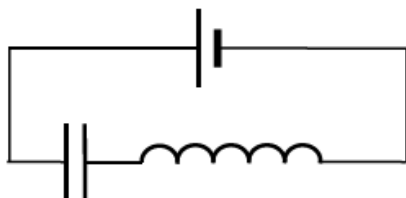
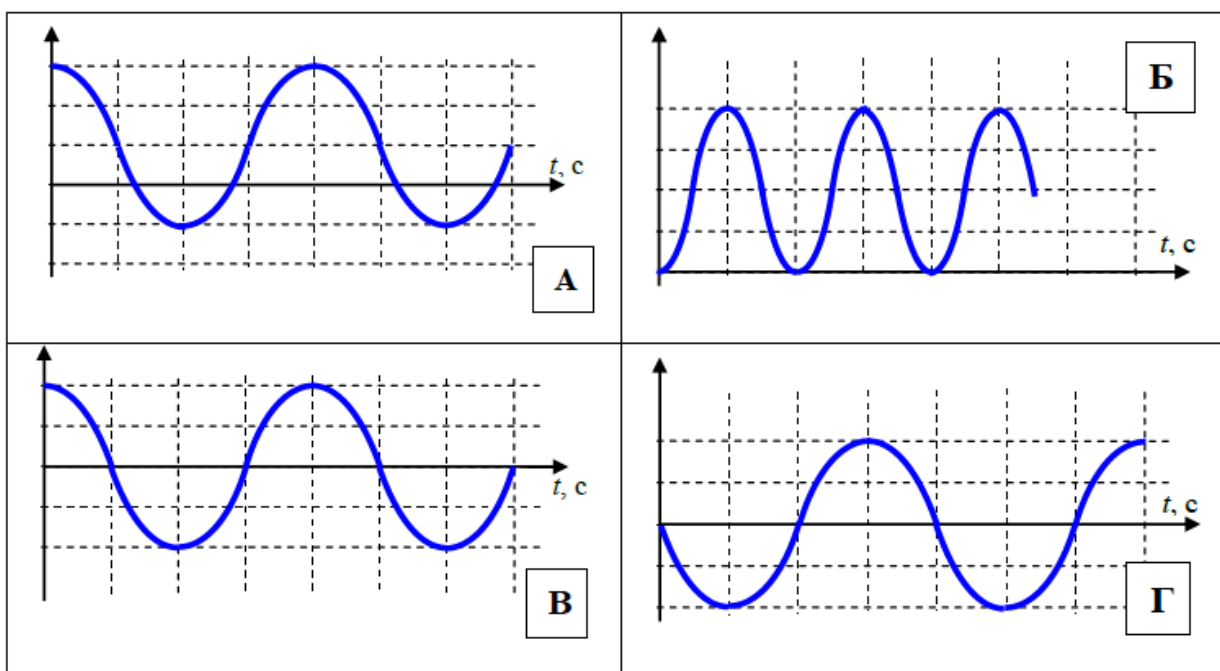


рисунок 2



1. График В описывает изменение энергии магнитного поля в катушке.
2. График Б описывает изменение энергии магнитного поля в катушке.
3. График А описывает изменение тока в контуре.
4. График В описывает изменение заряда конденсатора.
5. График Г описывает изменение тока в контуре.
6. График А описывает изменение ЭДС индукции в катушке.

Таблица для ответа:

--	--

Подсказка 1: проще всего установить, где находится графики заряда конденсатора и энергии магнитного поля.

Подсказка 2: колебания заряда конденсатора из-за присутствия источника происходят «несимметрично» относительно оси времени, несмотря на то, что он меняет знак, а энергия магнитного поля – единственная из заданных величин, которая всегда положительна.

Подсказка 3: колебания заряда конденсатора показаны на графике А.

Решение:

Проще всего установить, где находится графики заряда конденсатора и энергии магнитного поля: колебания заряда конденсатора $q(t) = CE + q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ (E - ЭДС источника) происходят «несимметрично» относительно оси времени, несмотря на то, что он меняет знак, поэтому ему соответствует график А (после этого вывода можно заметить, что $\varphi_0 = 0$).

Сразу становится ясно, что утверждения 3, 6 и 4 неверны. Энергия магнитного поля – единственная из заданных величин, которая всегда положительна, и ей соответствует график Б. Значит, утверждение 2 – верно, а 1 – нет. Поскольку верных утверждений два, то 5 должно быть верно. И действительно, сила тока должна проходить нули и максимумы «синхронно» с энергией магнитного поля, а таким свойством обладает только график Г.

Примечание: как теперь понятно, график В описывает поведение ЭДС индукции в катушке.

Действительно эта ЭДС пропорциональна скорости изменения тока ($E_i = -L \frac{dI}{dt}$), поэтому

она проходит через ноль в моменты, когда ток (график Γ) проходит через максимумы и минимумы.

Еще один способ все проверить: исходя из выражения для заряда $q(t) = CE + q_m \cos(\omega t)$,

можно найти, что: $I(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t)$, $E_L(t) = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\omega^2 q_m^2}{2} \sin^2(\omega t)$,

$E_i = -L \frac{dI}{dt} = L\omega^2 q_m \cos(\omega t)$. Тогда видно, что эти выражения отвечают найденным графикам.

Ответ: 25.

Задача 9 (3 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]

В идеальном колебательном контуре происходят свободные электромагнитные колебания. В таблице показано, как изменялся заряд на одной из обкладок конденсатора в контуре с течением времени:

t , мкс	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
q , нКл	2,12	3,00	2,12	0	-2,12	-3,00	-2,12	0	2,12	3,00

Чему равно максимальное значение силы тока в катушке? Ответ дайте в мА, округлив до десятых.

Подсказка 1: Из таблицы видно, что период электромагнитных колебаний в контуре $T = 16$ мкс, а максимальный заряд конденсатора $q_{\max} \approx 3,00$ нКл.

Подсказка 2: Максимальная сила токи в катушке и максимальный заряд конденсатора связаны соотношением $\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C}$.

Подсказка 3: Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Решение:

Из таблицы видно, что период электромагнитных колебаний в контуре $T = 16$ мкс, а максимальный заряд конденсатора $q_{\max} \approx 3,00$ нКл. В соответствии с законом сохранения энергии, максимальная сила токи в катушке и максимальный заряд конденсатора связаны

соотношением $\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C} \Rightarrow I_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}} q_{\max}$. Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$,

поэтому $I_{\max} = \frac{2\pi}{T} q_{\max} \approx 1,2$ мА.

Ответ: 1,2.

Задача 10 (4 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]

В идеальном колебательном контуре происходят свободные электромагнитные колебания. В таблице показано, как изменялся ток в контуре с течением времени, с точностью до сотой доли Ампера:

t , мкс	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
I , А	+2,83	0	-2,83	-4,00	-2,83	0	+2,83	+4,00	+2,83	0

Чему равна энергия электрического поля в конденсаторе в момент времени $t = 8$ мкс? Емкость конденсатора $C = 7$ нФ. Ответ дайте в мДж, округлив до десятых.

Подсказка 1: Из таблицы видно, что период колебаний в катушке $T = 16$ мкс, а амплитуда колебаний тока $I_m = 4$ А.

Подсказка 2: По закону сохранения энергии $E_L + E_C = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$.

Подсказка 3: Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Решение:

Из таблицы видно, что период колебаний в катушке $T = 16 \text{ мкс}$ (при гармонических колебаниях обращения тока в ноль происходят через половину периода), а амплитуда колебаний тока $I_m = 4 \text{ А}$ (это значение со знаком плюс или минус находится точно посередине между двумя нулями). По закону сохранения энергии в любой момент времени

$$E_L + E_C = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} \Rightarrow E_C = \frac{L}{2}(I_m^2 - I^2). \text{ Кроме того, по формуле Томсона, период}$$

собственных колебаний тока $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Поэтому $L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}$, откуда

$$E_C = \frac{T^2}{8\pi^2 C}(I_m^2 - I^2) \approx 3,7 \text{ мДж}.$$

Ответ: 3,7.

Задача 11 (4 балла) [гармонические колебания, колебательный контур, закон колебаний]

В идеальном колебательном контуре происходят гармонические колебания с периодом $T = 0,628 \text{ мс}$. В некоторый момент времени заряд конденсатора оказался равен $q_0 = 20 \text{ мкКл}$, а ток в катушке $I_0 = 0,1 \text{ А}$ (полярность показана на рисунке 5). Через какое время после этого заряд конденсатора впервые обратится в ноль? Ответ выразить в мс, округлив до десятых.

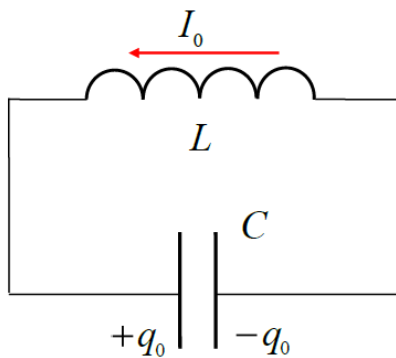


рисунок 5

Подсказка 1: гармонические колебания заряда и тока в идеальном контуре описываются выражениями: $q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, $I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Подсказка 2: в момент времени $t = 0$ начальные значения $q_0 = q_m \cdot \cos(\varphi_0)$, $I_0 = -\omega q_m \cdot \sin(\varphi_0)$ (причем I_0 положительно в соответствии с направлением тока, показанным на рисунке 4 – видно, что ток «дозаряжает» конденсатор).

Подсказка 3: из этих соотношений: $\text{tg}(\varphi_0) = -\frac{I_0}{\omega q_0} = -\frac{I_0 T}{2\pi q_0} \approx -0,5$.

Решение:

Гармонические колебания заряда и тока в идеальном контуре описываются выражениями:

$$q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0). \quad \text{Поэтому} \quad q_0 = q_m \cdot \cos(\varphi_0),$$

$I_0 = -\omega q_m \cdot \sin(\varphi_0)$ (причем I_0 положительно в соответствии с направлением тока, показанным на рисунке 4 – видно, что ток «дозаряжает» конденсатор). Как видно,

$$\text{tg}(\varphi_0) = -\frac{I_0}{\omega q_0} = -\frac{I_0 T}{2\pi q_0} \approx -0,5. \text{ Моменты обращения заряда в ноль определяются из}$$

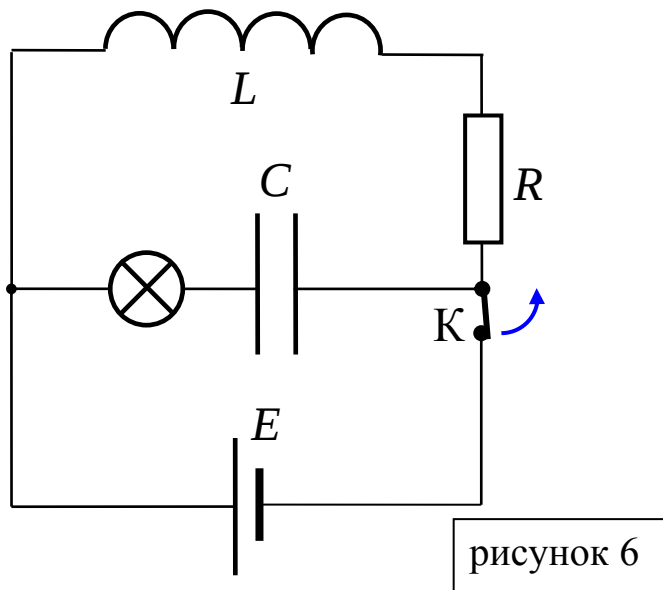
равенства $q(t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$. Минимальный положительный корень отвечает

$$t = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg(0,5) \right) = T \left(\frac{1}{4} + \frac{\arctg(0,5)}{2\pi} \right) \approx 0,2 \text{ мс.}$$

Ответ: 0,2.

Задача 12 (4 балла) [закон Ома, колебательный контур, энергия колебаний, затухающие колебания]

В схеме, показанной на рисунке 4, ключ К достаточно долго был замкнут. Какое количество теплоты выделится в нити лампы после размыкания ключа? Емкость конденсатора $C = 5 \text{ мкФ}$, индуктивность катушки $L = 50 \text{ мГн}$, сопротивление нити лампочки можно считать постоянным и равным трети сопротивления резистора $R = 100 \text{ Ом}$, омическое сопротивление катушки и внутреннее сопротивление источника пренебрежимо малы. ЭДС источника $E = 80 \text{ В}$. Ответ выразить в мДж.



Подсказка 1: пока ключ замкнут, в ветви с катушкой и резистором течет постоянный ток

$$I_0 = \frac{E}{R}, \text{ а напряжение на конденсаторе равно } E.$$

Подсказка 2: после размыкания ключа в контуре начинаются затухающие колебания, в ходе которых практически вся накопленная энергия (то есть энергия полей в конденсаторе и в катушке) выделяется в схеме в виде тепла.

Подсказка 3: это тепло распределяется между элементами контура пропорционально их сопротивлениям.

Решение:

Пока ключ был замкнут, схема перешла в «установившийся» (стационарный) режим, в котором в ветви с катушкой и резистором течет постоянный ток, определяемый из закона

$$\text{Ома для полной цепи: } I_0 = \frac{E}{R}, \text{ напряжение на конденсаторе равно } E, \text{ и его заряд } q_0 = CE.$$

После размыкания ключа в контуре начинаются затухающие колебания, в ходе которых вся

$$\text{накопленная энергия } W_0 = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{LI_0^2}{2} = \left(C + \frac{L}{R^2} \right) \frac{E^2}{2} \text{ выделяется в схеме в виде тепла}$$

(излучением пренебрегаем). Это тепло распределяется между элементами контура пропорционально их сопротивлениям (так как все они соединены последовательно).

Пренебрегая сопротивлением катушки, приходим к выводу, что четверть общего количества

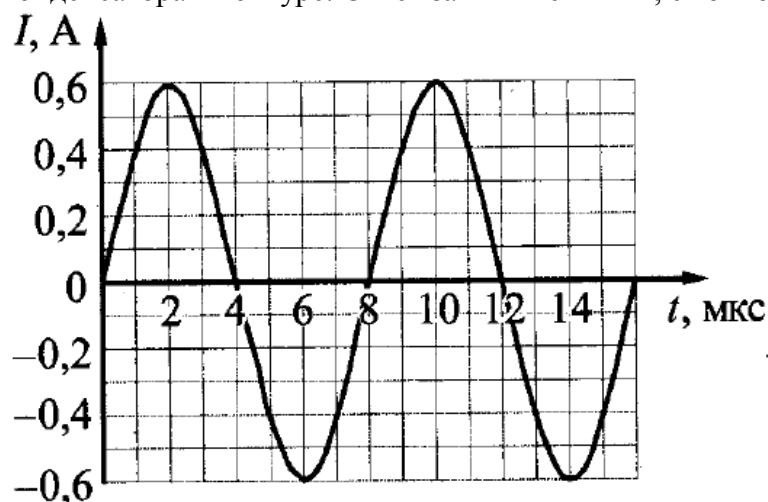
теплоты (Q_1) выделяется в нити лампы, а три четверти (Q_2) – в резисторе. Таким образом,

$$Q_1 = \frac{1}{4} W_0 = \left(C + \frac{L}{R^2} \right) \frac{E^2}{8} = 8 \text{ мДж.}$$

Ответ: 8.

Задача 13 (4 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]

Сила тока в идеальном колебательном контуре изменяется со временем так, как показано на рисунке. Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе $U_m = 0,382 \text{ В}$. Найти емкость конденсатора в контуре. Ответ запишите в мкФ, с точностью до десятых.



Подсказка 1: Из графика определяем: амплитуду колебаний тока $I_m = 0,6 \text{ А}$ и период колебаний $T = 8 \text{ мкс}$.

Подсказка 2: Максимальные энергии катушки и конденсатора при гармонических колебаниях равны: $\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{I_m^2}{U_m^2}$.

Подсказка 3: Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Решение:

Из графика определяем: амплитуду колебаний тока $I_m = 0,6 \text{ А}$ и период колебаний $T = 8 \text{ мкс}$.

Максимальные энергии катушки и конденсатора при гармонических колебаниях равны:

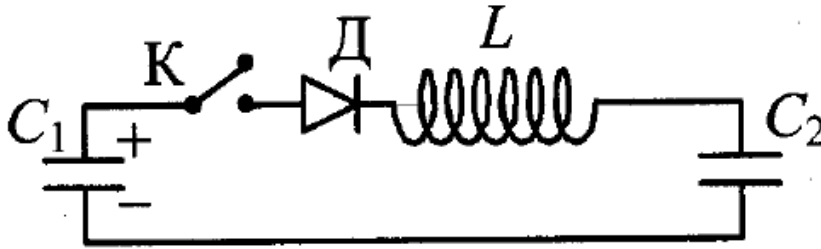
$$\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{I_m^2}{U_m^2}. \text{ Согласно формуле Томсона, } T = 2\pi\sqrt{LC}. \text{ Поэтому } LC = \frac{T^2}{4\pi^2}.$$

Перемножая два полученных равенства, находим, что $C = \frac{TI_m}{2\pi U_m} \approx 1,0 \text{ мкФ}$.

Ответ: 1,0.

Задача 14 (5 баллов) [гармонические колебания, колебательный контур]

К конденсатору с емкостью $C_1 = 10 \text{ мкФ}$ через ключ, идеальный диод и катушку индуктивности подключен второй конденсатор с емкостью $C_2 = 50 \text{ мкФ}$ (см. рисунок). До замыкания ключа первый конденсатор был заряжен до заряда $q = 540 \text{ мкКл}$, а второй – полностью разряжен. Каким будет заряд второго конденсатора спустя некоторое время после замыкания ключа? Активное сопротивление цепи пренебрежимо мало. Ответ приведите в мкКл, при необходимости округлив до целого значения.



Подсказка 1: После замыкания ключа заряд перетекает на конденсатор C_2 до тех пор, пока диод не окажется заперт при нулевом токе.

Подсказка 2: Так как активное сопротивление отсутствует, то выполняется закон сохранения энергии конденсаторов.

Подсказка 3: Кроме того, по закону сохранения заряда $q = q_1 + q_2$.

Решение:

После замыкания ключа заряд перетекает на конденсатор C_2 , так как диод будет открыт. Это будет продолжаться до того, как диод окажется заперт при нулевом токе. После этого контур перейдет в состояние равновесия. Так как активное сопротивление отсутствует, то выполняется закон сохранения энергии. Поскольку тока в равновесном состоянии нет, то

этот закон требует, чтобы $\frac{q^2}{2C_1} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}$ (здесь q_1 и q_2 – заряды конденсаторов в новом

положении равновесия). Кроме того, по закону сохранения заряда $q = q_1 + q_2$. Решая полученную систему относительно q_2 , найдем:

$$q^2 = (q - q_2)^2 + \frac{C_1}{C_2} q_2^2 \Rightarrow q_2 = \frac{2C_2}{C_1 + C_2} q = 900 \text{ мкКл}.$$

Примечание: нетрудно заметить, что $q_1 = q - q_2 = -360 \text{ мкКл}$, то есть первый конденсатор успевает, пока диод открыт, не только разрядиться, но и изменить свою полярность – здесь действительно происходят колебания до запираания диода!

Ответ: 900.