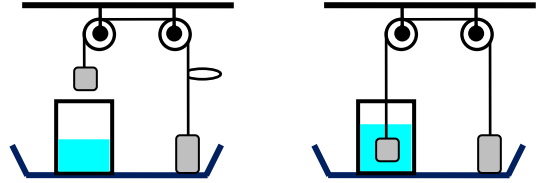


Задание 1:

Вопрос: На чаше весов расположен сосуд с водой и гиря массой 1 кг, к которой с помощью легкой нерастяжимой нити, перекинутой через два идеальных блока, подвешена еще одна гиря – массой 400 г. Нить укорочена с помощью завязанной петли, так что меньшая гиря висит над поверхностью воды. Петлю развязали, и аккуратно отпустили высвободившуюся нить. Теперь меньшая гиря полностью погрузилась в воду, но не касается дна сосуда (см. рисунки). Как и на сколько изменились показания весов во втором



случае по сравнению с первым? Плотность материала гирь в 8 раз больше плотности воды.

Ответ: Пока меньшая гиря (массой m) находится над поверхностью воды, ее вес растягивает нить, и сила натяжения нити равна $T_1 = mg$. Тогда сила, с которой большая гиря (массой M) давит на шашку весов, равна $N_1 = Mg - T_1 = (M - m)g$. Показания весов соответствуют сумме этой силы и веса сосуда с водой. После опускания меньшей гири в воду на эту гирю действует сила Архимеда

$$F_A = \rho_B Vg = \frac{\rho_B}{\rho_G} mg = \frac{mg}{8}. \text{ Поэтому сила натяжения нити уменьшается на эту величину } T_2 = \frac{7}{8}mg, \text{ а}$$

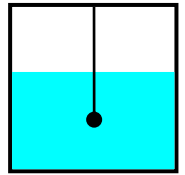
сила давления большей гири на чашку весов – увеличивается на нее же:

$$N_2 = Mg - T_2 = (M - m)g + \frac{mg}{8}.$$

Кроме того, со стороны гири на воду в сосуде действует сила, равная по величине силе Архимеда и направленная вниз, и вода передает действие этой силы на дно сосуда. Массы воды и сосуда не изменяются, поэтому общая сила, действующая на чашку весов, увеличивается

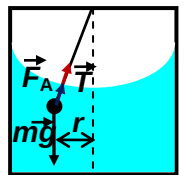
$$\text{на } 2F_A = \frac{mg}{4}. \text{ Таким образом, показания весов увеличились на } 100 \text{ г.}$$

Задача: Цилиндрический сосуд радиуса $R = 64 \text{ см}$ с гладкими стенками на 60% заполнен водой. По оси сосуда к его крышке на легкой нерастяжимой нити подвешен небольшой груз. Сосуд аккуратно раскручивают вокруг его оси, добиваясь установившегося движения, при котором груз и вода вращаются с одинаковой угловой скоростью. При $\omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}$ сила натяжения нити оказалась равна $T_0 = 6 \text{ Н}$. Какой станет сила натяжения нити при $\omega_1 = 4 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_2 = 6 \text{ с}^{-1}$? Длина нити $L = 80 \text{ см}$, груз при любой из частот целиком находится под водой, а вода не достигает крышки сосуда. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$.



Решение: При установившемся вращении сосуда с водой на груз, вращающийся по окружности радиуса r , действуют сила тяжести, сила Архимеда и сила натяжения нити. По вертикали груз не движется, и проекции сил на вертикаль уравнивают друг друга, то есть $mg = T \cos(\alpha) + F_{A\parallel}$

(здесь α – угол наклона нити к вертикали, $F_{A\parallel}$ – вертикальная компонента силы Архимеда). Уравнение для центростремительной компоненты ускорения груза $m\omega^2 r = T \sin(\alpha) + F_{A\perp}$. Для вычисления компонент силы Архимеда заметим, что



окружающая груз вода «не знает» что находится в объеме, занятом грузом с плотностью ρ , и, если мысленно поставить на место груза такой же объем воды с плотностью ρ_0 (разумеется, без всякой нити)

с массой $\Delta m = \frac{\rho_0}{\rho} m$, то такая же в точности сила Архимеда уравнивала бы для него силу тяжести

и создавала центростремительное ускорение. Значит, $F_{A\parallel} = \Delta mg = \frac{\rho_0}{\rho} mg$ и

$F_{A\perp} = \Delta m\omega^2 r = \frac{\rho_0}{\rho} m\omega^2 r$. Подставляя эти выражения в уравнения для груза, находим:

$$T \cos(\alpha) = mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right), \quad T \sin(\alpha) = m\omega^2 r \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

Так как $r = L \sin(\alpha)$, то сила натяжения нити определяется формулой $T = m\omega^2 L \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$, а угол отклонения нити – уравнением $\cos(\alpha) = \frac{g}{\omega^2 L}$.

Отметим, что из полученных формул следует, что сила Архимеда направлена так же, как и сила

натяжения – вдоль нити. Однако полученная для силы натяжения нити формула справедлива не для любого значения угловой скорости. В самом деле, ненулевые значения угла отклонения получаются только при $\omega > \sqrt{\frac{g}{L}} = 3,5 \text{ с}^{-1}$, а при меньших ω угол $\alpha = 0$ и $T = mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$. Как видно, значение

$\omega_0 = 2 \text{ с}^{-1} < 3,5 \text{ с}^{-1}$, так что $mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) = T_0$. С другой стороны, требование отсутствия опоры шарика

на стенку $r = L \sin(\alpha) < R$ приводит к ограничению

$$\cos(\alpha) = \frac{g}{\omega^2 L} > \frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{L} \Rightarrow \omega < \sqrt{\frac{g}{\sqrt{L^2 - R^2}}} \approx 4,52 \text{ с}^{-1}. \quad \text{Как видно, величина } \omega_1 = 4 \text{ с}^{-1}$$

удовлетворяет этому ограничению, и поэтому $T_1 = \frac{\omega_1^2 L}{g} T_0 \approx 7,8 \text{ Н}$. Величина $\omega_2 = 6 \text{ с}^{-1}$ не

удовлетворяет этому ограничению, и поэтому при такой угловой скорости вращения шарик упирается в

гладкую стенку сосуда. Ясно, что при этом $\sin(\alpha) = \frac{R}{L} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{L} = \frac{3}{5}$, и сила

натяжения нити $T_2 = \frac{T_0}{\cos(\alpha)} = \frac{5}{3} T_0 = 10 \text{ Н}$.

ОТВЕТ: $T_1 = \frac{\omega_1^2 L}{g} T_0 \approx 7,8 \text{ Н}$, $T_2 = \frac{L}{\sqrt{L^2 - R^2}} T_0 = 10 \text{ Н}$.

Задание 2:

Вопрос: Человек, стоящий у горизонтальной ленты транспортера, запускает шайбу массой 100 г скользить по ленте против ее движения. За время, прошедшее до прекращения относительного движения шайбы и ленты, лента сместилась относительно человека на 1,5 м, а шайба – на 30 см в ту же сторону, что и лента. Какое количество теплоты выделилось из-за трения шайбы о ленту? Коэффициент трения между ними 0,5, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 .

Ответ: Выделившееся количество теплоты равно модулю работы силы трения, равной $\mu mg \approx 0,5 \text{ Н}$. Путь, пройденный шайбой по ленте $s = 1,5 \text{ м} - 0,3 \text{ м} = 1,2 \text{ м}$, и поэтому $Q = \mu mgs \approx 0,6 \text{ Дж}$.

Задача: Длинная стальная плита массой $M = 600 \text{ кг}$ катится с постоянной скоростью $V = 0,6 \text{ м/с}$ по горизонтальному участку транспортера, состоящего из множества роликов с радиусом $r = 5 \text{ см}$, расположенных перпендикулярно направлению движения плиты на небольшом расстоянии друг от друга, и вращающихся с угловой скоростью $\omega = 16 \text{ с}^{-1}$. Движение плиты поддерживается за счет трения между роликами и плитой. Пренебрегая всеми потерями, кроме выделения тепла при трении, найдите КПД транспортера (отношение мощности, идущей на перемещение плиты, к мощности, которая расходуется на поддержание вращения роликов, контактирующих с плитой). Чему равна мощность тепловых потерь, если коэффициент трения между роликами и плитой $\mu = 0,8$? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Решение: Скорость движения точек поверхностей роликов $v = \omega r = 0,8 \text{ м/с}$ больше скорости движения катящейся по ним плиты. Это означает, что существует проскальзывание, и сила трения между роликами и плитой – это сила трения скольжения, равная $F_{mp} = \mu Mg$. Мощность работы этой силы над плитой – полезная мощность транспортера $P_n = F_{mp} \cdot V$. Затрачиваемая мощность при постоянной угловой скорости вращения роликов равна мощности, соответствующей работе такой же по величине силы трения над роликами, соприкасающимися с плитой, то есть $P_3 = F_{mp} \cdot v$. Следовательно, КПД

транспортера $\eta = \frac{P_n}{P_3} = \frac{V}{\omega r} = 75\%$. Мощность тепловых потерь из-за проскальзывания плиты по

роликам $P_T = P_3 - P_n = (\omega r - V) \mu Mg = 960 \text{ Вт}$.

ОТВЕТ: $\eta = \frac{V}{\omega r} = 75\%$, $P_T = (\omega r - V) \mu Mg = 960 \text{ Вт}$.

Задание 3:

Вопрос: К аккумулятору с ЭДС 12 В и внутренним сопротивлением 0,5 Ом подключают прибор, сопротивление которого можно регулировать в пределах от 1 Ом до 5 Ом. Какую максимальную мощность может потреблять прибор от аккумулятора?

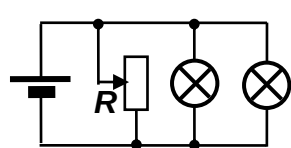
Ответ: Пусть R – сопротивление прибора. Тогда вместе с изменением этого сопротивления меняется и сила тока в цепи $I = \frac{U_0}{R+r}$ (U_0 – величина ЭДС, r – внутреннее сопротивление аккумулятора).

Мощность потребления $P = I^2 R = \frac{U_0^2 R}{(R+r)^2}$ при сопротивлениях, превышающих внутреннее

сопротивление аккумулятора, убывает с ростом сопротивления. Поэтому максимальная мощность соответствует минимальному сопротивлению $R=1\text{ Ом}$ и равна 64 Вт.

Задача: Две одинаковые лампы с номинальной мощностью $P=8\text{ Вт}$ рассчитаны на одинаковое напряжение $U=6\text{ В}$. Их подключили к аккумулятору с ЭДС, равным $U_0=9\text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r=1\text{ Ом}$, параллельно друг другу и параллельно с реостатом. Каким должно быть сопротивление реостата, чтобы лампы работали в номинальном режиме?

Решение: Так как лампы должны работать в номинальном режиме, то напряжение на них равно U , а сила



тока через каждую лампу $I = \frac{P}{U}$. Сила тока через реостат, подключенный

параллельно лампам, должна быть равна $I_R = \frac{U}{R}$, а сила тока через источник

может быть записана в виде $I_0 = \frac{U_0 - U}{r}$. С другой стороны, из закона сохранения заряда (принципа

непрерывности тока) следует, что $I_0 = I_R + 2I$. Из этого уравнения следует, что $\frac{U_0 - U}{r} = \frac{U}{R} + \frac{2P}{U}$,

откуда $R = \frac{U^2 r}{U(U_0 - U) - 2rP} = 18\text{ Ом}$.

ОТВЕТ: $R = \frac{U^2 r}{U(U_0 - U) - 2rP} = 18\text{ Ом}$.

Задание 4:

Вопрос: Маленький шарик вращается по окружности радиусом 2 м в вертикальной плоскости, совершая полный оборот за 6 с. Найдите его среднюю путевую скорость за 10 полных оборотов.

Ответ: Согласно определению средней путевой скорости, $v_{cp} = \frac{10 \cdot 2\pi R}{10 \cdot T} = \frac{2\pi R}{T} \approx 2,09\text{ м/с}$.

Задача: В зале, в котором проходят робототехнические соревнования, установлена обзорная видеокамера на вращающейся подставке. Объектив видеокамеры ориентирован горизонтально и движется по окружности радиуса $r=50\text{ см}$ с периодом $T=1\text{ мин}$. В некоторый момент в поле зрения объектива попал робот, находящийся на расстоянии $R=19,5\text{ м}$ от объектива, двигавшийся (согласно видеозаписи) со скоростью $v=1\text{ м/с}$, направленной под углом $\alpha=45^\circ$ к плоскости, проходящей через робота и ось вращения камеры, «вперед» по направлению вращения. С какой скоростью двигался робот относительно пола?

Решение: Скорость робота по данным видеозаписи – это его скорость относительно вращающейся системы отсчета (далее – относительная скорость), и она равна векторной разности искомой скорости робота относительно пола и «переносной» скорости этой системы отсчета в точке нахождения робота. Переносная скорость равна по величине $V_n = \omega(R+r)$ ($R+r=20\text{ м}$ – расстояние до робота от оси

вращения камеры) и направлена перпендикулярно радиусу. Угловая скорость камеры $\omega = \frac{2\pi}{T}$, поэтому

$V_n = \frac{2\pi(R+r)}{T} \approx 2,09\text{ м/с}$. Радиальная компонента скорости робота относительно пола равна

$V_R = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 0,71\text{ м/с}$, а компонента, перпендикулярная радиусу $V_\perp = \frac{v}{\sqrt{2}} + V_n \approx 2,80\text{ м/с}$. Поэтому

величина его скорости относительно пола

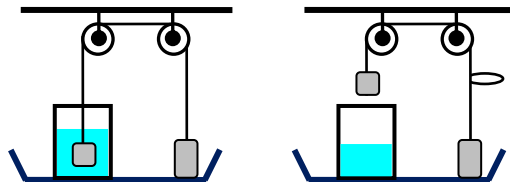
$$V = \sqrt{V_R^2 + V_{\perp}^2} = \sqrt{v^2 + \frac{4\pi^2(r+R)^2}{T^2} + \frac{4\pi(R+r)v\sin(\alpha)}{T}} \approx 2,89 \text{ м/с.}$$

ОТВЕТ: $V = \sqrt{v^2 + \frac{4\pi^2(r+R)^2}{T^2} + \frac{4\pi(R+r)v\sin(\alpha)}{T}} \approx 2,9 \text{ м/с.}$

БИЛЕТ № 07

Задание 1:

Вопрос: На чаше весов расположен сосуд с водой и гиря массой 2 кг, к которой с помощью легкой нерастяжимой нити, перекинутой через два идеальных блока, подвешена еще одна гиря – массой 600 г. Меньшая гиря полностью погружена в воду, но не касается дна сосуда. Потянув за нить, эту гирю извлекли из воды и закрепили, завязав на нити петлю (см. рисунки). Как и на сколько изменились показания весов во втором случае по сравнению с первым, когда вся вода с меньшей гири стекла обратно в сосуд? Плотность материала гири в 6 раз больше плотности воды.



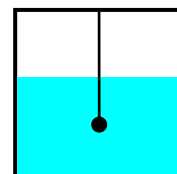
Ответ: Когда меньшая гиря (массой m) оказывается над поверхностью воды, ее вес растягивает нить, и сила натяжения нити равна $T_2 = mg$. Тогда сила, с которой большая гиря (массой M) давит на шашку весов, равна $N_2 = Mg - T_2 = (M - m)g$. Показания весов соответствуют сумме этой силы и веса сосуда с водой. Пока меньшая гиря находилась в воде, на эту гирю действовала сила Архимеда

$$F_A = \rho_B V g = \frac{\rho_B}{\rho_{\Gamma}} mg = \frac{mg}{6}. \text{ Поэтому сила натяжения нити была меньше на эту величину } T_1 = \frac{5}{6} mg, \text{ а}$$

сила давления большей гири на чашку весов – больше на нее же: $N_1 = Mg - T_1 = (M - m)g + \frac{mg}{6}$.

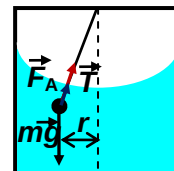
Кроме того, со стороны гири на воду в сосуде действует сила, равная по величине силе Архимеда и направленная вниз, и вода передает действие этой силы на дно сосуда. Массы воды и сосуда не изменяются, поэтому общая сила, действующая на чашку весов, в первом случае была больше на $2F_A = \frac{mg}{3}$. Таким образом, показания весов уменьшились на 200 г.

Задача: Цилиндрический сосуд радиуса $R = 70 \text{ см}$ с гладкими стенками на 60% заполнен водой. По оси сосуда к его крышке на легкой нерастяжимой нити подвешен небольшой груз. Сосуд аккуратно раскручивают вокруг его оси, добиваясь установившегося движения, при котором груз и вода вращаются с одинаковой угловой скоростью. При $\omega_0 = 3 \text{ с}^{-1}$ сила натяжения нити оказалась равна $T_0 = 6 \text{ Н}$. Какой станет сила натяжения нити при $\omega_1 = 3,5 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_2 = 4 \text{ с}^{-1}$? Длина нити $L = 98 \text{ см}$, груз при любой из частот целиком находится под водой, а вода не достигает крышки сосуда. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$.



Решение: При установившемся вращении сосуда с водой на груз, вращающийся по окружности радиуса r , действуют сила тяжести, сила Архимеда и сила натяжения нити. По вертикали груз не движется, и проекции сил на вертикаль уравниваются друг друга, то есть $mg = T \cos(\alpha) + F_{A\parallel}$

(здесь α – угол наклона нити к вертикали, $F_{A\parallel}$ – вертикальная компонента силы Архимеда). Уравнение для центростремительной компоненты ускорения груза $m\omega^2 r = T \sin(\alpha) + F_{A\perp}$. Для вычисления компонент силы Архимеда заметим, что



окружающая груз вода «не знает» что находится в объеме, занятом грузом с плотностью ρ , и, если мысленно поставить на место груза такой же объем воды с плотностью ρ_0 (разумеется, без всякой нити)

с массой $\Delta m = \frac{\rho_0}{\rho} m$, то такая же в точности сила Архимеда уравнивала бы для него силу тяжести

и создавала центростремительное ускорение. Значит, $F_{A\parallel} = \Delta mg = \frac{\rho_0}{\rho} mg$ и