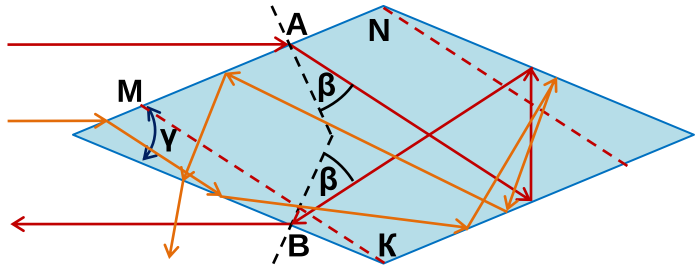
оставшихся угла равны $\beta$. Так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то $\beta = \gamma/2$. Следовательно, необходимым условием возможности описанного свойства лучей является уравнение $\sin(\gamma/2) = \frac{1}{n}\cos(\gamma/2)$, из которого следует, что $n = \mathrm{ctg}(\gamma/2) = \mathrm{ctg}(25°)$. Проверим, является ли это условие достаточным. Теперь мы знаем, что $\beta = 25°$, и можем произвести построение хода лучей в призме.




Как видно, лучи, падающие выше точки M, действительно испытывают отражение от двух сторон двугранного угла, прежде чем выйти через обозначенную грань. Но могут быть лучи, идущие ниже этой точки. Такие лучи сразу попадают на смежную грань, но не выходят из нее, так как испытывают полное внутреннее отражение при полученном коэффициенте преломления. Далее их путь до нужной грани проходит через еще 4 отражения, и они падают на нее под «неподходящим» углом – если ширина пучка такова, что в нем есть лучи, падающие ниже точки M, то условие задачи не выполняется, и есть лучи, выходящие из смежной грани с углом поворота, отличным от 180°. Значит, требование $n = \mathrm{ctg}(\gamma/2) = \mathrm{ctg}(25°)$ является необходимым, но не достаточным – для выполнения требований условия нужно, чтобы все точки падения лучей пучка принадлежали отрезку NM.

**ОТВЕТ**: $n = \mathrm{ctg}(\gamma/2) = \mathrm{ctg}(25°) \approx 2{,}1$; условие задачи корректно, если все точки падения лучей пучка принадлежат отрезку NM (луч KM образует угол 15° с ближайшей гранью призмы). Ответ в виде числа не является обязательным.

## БИЛЕТ № 05

**Задание 1:**

**Вопрос**: Спутник вращается в плоскости земного экватора в направлении движения Земли по круговой орбите, радиус которой в 8 раз больше радиуса Земли (примерно равного 6400 км). Найдите его скорость в системе отсчета, связанной с Землей. Период вращения Земли 24 часа, ускорение свободного падения на ее поверхности 10 м/с$^2$.

**Ответ**: Если спутник неподвижен относительно Земли, то он вращается по своей орбите с той же угловой скоростью, что и Земля, то есть $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Поэтому величина его скорости относительно Земли – модуль разности его скорости и скорости точки на его орбите, вращающейся с угловой скоростью $\Omega$. С учетом уравнения для центростремительной компоненты ускорения на орбите радиуса $r = 8R$, которая создается силой притяжения Земли, угловая скорость спутника находится из соотношения $m\omega^2 8R = \frac{GmM}{64R^2} = \frac{mg}{64}$ и равна $\omega = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{g}{2R}}$. Значит, искомая скорость $v' = |\omega - \Omega| \cdot 8R = \frac{16\pi R}{T} - \sqrt{\frac{gR}{8}} \approx 0{,}9$ км/с.

**Задача**: В зале, в котором проходят робототехнические соревнования, установлена обзорная видеокамера на вращающейся подставке. Объектив видеокамеры ориентирован горизонтально и движется по окружности радиуса $r = 50$ см с периодом $T = 50$ с. В некоторый момент в поле зрения объектива попал робот, находящийся на расстоянии $R = 24{,}5$ м от объектива, двигавшийся (согласно видеозаписи) со скоростью $v = 1{,}5$ м/с, направленной под углом $\alpha = 60°$ к плоскости, проходящей через робота и ось вращения камеры, «назад» от направления вращения. С какой скоростью двигался робот относительно пола?

**Решение**: Скорость робота по данным видеозаписи – это его скорость относительно вращающейся системы отсчета (далее – относительная скорость), и она равна векторной разности искомой скорости робота относительно пола и «переносной» скорости этой системы отсчета в точке нахождения робота. Переносная скорость равна по величине $V_n = \omega(R + r)$ ($R + r = 74{,}5$ м – расстояние до робота от оси вращения камеры) и направлена перпендикулярно радиусу. Угловая скорость камеры $\omega = \frac{2\pi}{T}$, поэтому $V_n = \frac{2\pi(R+r)}{T} \approx 9{,}36$ м/с. Радиальная компонента скорости робота относительно пола равна

$V_R = v\cos(\alpha) = 0{,}75$ м/с, а компонента, перпендикулярная радиусу $V_\perp = V_n - v\sin(\alpha) \approx 8{,}06$ м/с. Поэтому величина его скорости относительно пола $V = \sqrt{V_R^2 + V_\perp^2} = \sqrt{v^2 + \frac{4\pi^2(r+R)^2}{T^2} - \frac{4\pi(R+r)v\sin(\alpha)}{T}} \approx 8{,}06$ м/с.

**ОТВЕТ**: $V = \sqrt{V_R^2 + V_\perp^2} = \sqrt{v^2 + \frac{4\pi^2(r+R)^2}{T^2} - \frac{4\pi(R+r)v\sin(\alpha)}{T}} \approx 8$ м/с.

**Вариант правильного решения**: так как $r > R$, то камера может двигаться «вокруг» площадки соревнований, и тогда робот находится «внутри» траектории камеры. В этом случае расстояние до робота от оси вращения камеры $r - R = 25{,}5$ м. Тогда величина переносной скорости $V_n = \frac{2\pi(r-R)}{T} \approx 3{,}20$ м/с, а компонента абсолютной скорости, перпендикулярная радиусу, $V_\perp = V_n - v\sin(\alpha) \approx 1{,}90$ м/с.

В этом случае $V = \sqrt{V_R^2 + V_\perp^2} = \sqrt{v^2 + \frac{4\pi^2(r-R)^2}{T^2} - \frac{4\pi(r-R)v\sin(\alpha)}{T}} \approx 3{,}7$ м/с.

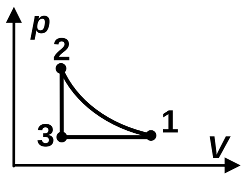
**Задание 2:**

**Вопрос**: Тепловой насос – установка, перекачивающая теплоту от более холодного тела к более горячему за счет совершения работы. Его эффективность характеризуют величиной коэффициента трансформации – отношения количества тепла, переданного более нагретому телу, к потраченной работе. Допустим, что в качестве теплового насоса, передающего теплоту от тела с температурой $t_X = 7°C$ к телу с температурой $t_H = 47°C$, используется установка, работающая по циклу Карно. Чему равен ее коэффициент трансформации?

**Ответ**: В этом случае цикл Карно происходит в «обратном» направлении по сравнению с тепловой машиной, и поэтому работа и количества теплоты изменяют знак. Работа над рабочим телом теплового насоса по величине равна работе рабочего тела тепловой машины, а количество теплоты, отданное тепловым насосом более нагретому телу, равно количеству теплоты, полученному в тепловой машине от нагревателя. Таким образом, коэффициент трансформации насоса равен обратному КПД тепловой машины: $k = \frac{T_H}{T_H - T_X} = 8$, то есть 800%.

**Задача**: Рабочим телом теплового насоса является постоянное количество гелия. Цикл рабочего тела состоит из изохоры, изобары и адиабаты, причем работа двигателя насоса над газом в процессе адиабатического сжатия на 25% больше работы газа в процессе изобарного расширения. Двигатель теплового насоса потребляет от сети мощность $P_0 = 100$ Вт, а его КПД равен 70%. Вычислите мощность подачи тепла к нагреваемому телу.

**Решение**: Построим диаграмму цикла рабочего тела в координатах давление-объем и изучим




направление теплообмена в разных процессах: адиабата 1-2 – теплообмен отсутствует, изохорное охлаждение 2-3 – рабочее тело передает количество теплоты $Q_H$ нагреваемому телу, изобарное расширение 3-1 – рабочее тело получает тепло от «холодильника». Поскольку в изохорном процессе работа не совершается, то полная работа над газом в цикле $A' = A'_{12} + A'_{31} = A'_{12} - A_{31}$. Согласно условию, $A'_{12} = 1{,}25 \cdot A_{31}$, то есть $A' = 0{,}25 \cdot A_{31}$. С другой стороны, в изобарном процессе, согласно I Началу термодинамики $Q_X = Q_{31} = A_{31} + \Delta U_{31}$. При этом $\Delta U_{31} = \frac{3}{2} p_1(V_1 - V_3)$, а $A_{31} = p_1(V_1 - V_3)$, то есть $Q_X = A_{31} + \frac{3}{2}A_{31} = \frac{5}{2}A_{31}$. Тогда $Q_H = Q_X + A' = 2{,}75 \cdot A_{31}$. Значит, коэффициент трансформации теплового насоса $k = \frac{Q_H}{A'} = \frac{2{,}75 \cdot A_{31}}{0{,}25 \cdot A_{31}} = 11$. Таким образом, мощность подачи тепла к нагреваемому телу в 11 раз больше мощности работы над рабочим телом теплового насоса, то есть $P_H = 11 \cdot P = 11 \cdot 0{,}7 \cdot P_0 = 7{,}7P_0 = 770$ Вт.

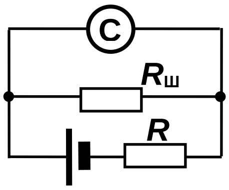
**ОТВЕТ**: $P_H = 7{,}7P_0 = 770$ Вт.

**Задание 3:**

**Вопрос**: К аккумулятору с ЭДС 12 В и внутренним сопротивлением 3 Ом подключают прибор, сопротивление которого можно регулировать в пределах от 0,5 Ом до 5 Ом. Какую максимальную мощность может потреблять прибор от аккумулятора?

**Ответ**: Пусть $R$ – сопротивление прибора. Тогда вместе с изменением этого сопротивления меняется и сила тока в цепи $I = \frac{U_0}{R+r}$ ($U_0$ – величина ЭДС, $r$ – внутреннее сопротивление аккумулятора). Как видно, сила тока изменяется от очень малой (при большом сопротивлении) до максимальной $I_m = \frac{U_0}{r}$ (когда сопротивление близко к нулю). Мощность потребления равна $P_T = U \cdot I$, а напряжение на приборе тоже можно выразить через силу тока: $U = U_0 - rI$. Следовательно, $P_T = I(U_0 - rI) = r \cdot I(I_m - I)$, и поэтому максимум мощности отвечает $I = \frac{I_m}{2}$, то есть $R = r$, и равен $P_{\max} = \frac{U_0^2}{4r} = 12$ Вт. Заметим, что значение 3 Ом принадлежит диапазону возможных сопротивлений прибора.

**Задача:** Для питания электронной схемы С необходимо подавать на ее вход напряжение $5\text{В} \le U \le 6\text{В}$. В ходе работы схемы ее ток потребления может меняться в пределах от 60 мА до 100 мА. У нас есть аккумулятор с ЭДС $U_0 = 9$ В и набор сопротивлений. В предложенной схеме питания схемы (см. рисунок) шунтирующий резистор имеет сопротивление $R_ш = 100$ Ом. Каким должно быть сопротивление резистора $R$ в ветви с источником, чтобы схема всегда работала в нормальном режиме? Внутреннее сопротивление аккумулятора заметно меньше 0,5 Ом.



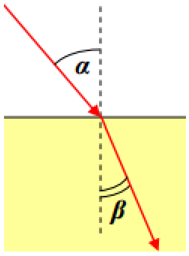

**Решение**: Как видно из условия, сопротивление прибора $\tilde{R}$ может изменяться в пределах от $R_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} = 50$ Ом до $R_{\max} = \frac{U_{\max}}{I_{\min}} = 100$ Ом. С другой стороны, при заданном значении этого сопротивления напряжение на приборе (который соединен параллельно с шунтирующим резистором) равно $U = \frac{R_ш \tilde{R}/(R_ш + \tilde{R})}{R + R_ш \tilde{R}/(R_ш + \tilde{R})} U_0 = \frac{R_ш \tilde{R}}{R_ш \tilde{R} + R(R_ш + \tilde{R})} U_0$. Для нормальной работы прибора необходимо, чтобы при любом допустимом значении его сопротивления выполнялось требование $U_{\min} \le U \le U_{\max}$. С учетом полученной формулы для напряжения, это требование может быть переписано в виде $U_{\min} \le \frac{U_0}{1 + R/\tilde{R} + R/R_ш} \le U_{\max}$. Левая часть неравенства приводит к требованию $\frac{R}{R_ш} + \frac{R}{\tilde{R}} \le \frac{U_0}{U_{\min}} - 1$. Оно становится наиболее жестким при $R = R_{\min}$, и поэтому $R \le \frac{U_0 - U_{\min}}{U_{\min} + R_ш I_{\max}} R_ш = 26\frac{2}{3}$ Ом. Правая часть неравенства приводит к требованию $\frac{R}{R_ш} + \frac{R}{\tilde{R}} \ge \frac{U_0}{U_{\max}} - 1$, которое в наиболее жестком случае $R = R_{\max}$ дает $R \ge \frac{U_0 - U_{\max}}{U_{\max} + R_ш I_{\min}} R_ш = 25$ Ом.

**ОТВЕТ**: допустимые значения сопротивления резистора $\frac{U_0 - U_{\max}}{U_{\max} + R_ш I_{\min}} R_ш \le R \le \frac{U_0 - U_{\min}}{U_{\min} + R_ш I_{\max}} R_ш$, или $25\text{Ом} \le R \le 26\frac{2}{3}\text{Ом}$.

**Задание 4:**

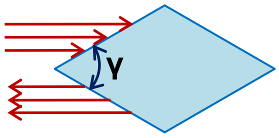
**Вопрос**: Сформулируйте закон преломления световых лучей.

**Ответ**: При переходе световых лучей через границу раздела сред с различными показателями преломления происходит их преломление. При этом луч падающий, луч преломленный и нормаль к

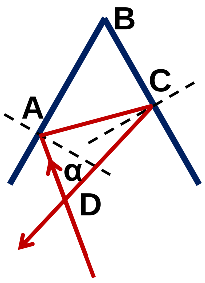



преломляющей поверхности в точке падения лежат в одной плоскости, а угол падения $\alpha$ (угол между падающим лучом и нормалью) и угол преломления $\beta$ (угол между нормалью и преломленным лучом) связаны соотношением Снелла: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}$. Здесь $n_1$ и $n_2$ – показатели преломления сред падения и преломления, а $n_{21}$ – их относительный показатель преломления.

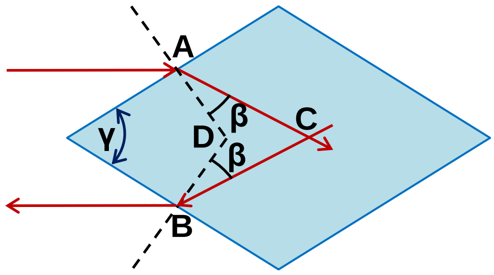
**Задача**: На боковую поверхность призмы, сечение которой – ромб с меньшим углом $\gamma=70^\circ$, вдоль большей диагонали падает параллельный пучок световых лучей (см. рисунок). После прохождения призмы лучи, выходящие через грань, смежную с гранью падения, развернулись ровно на 180°. Найдите показатель преломления вещества призмы.

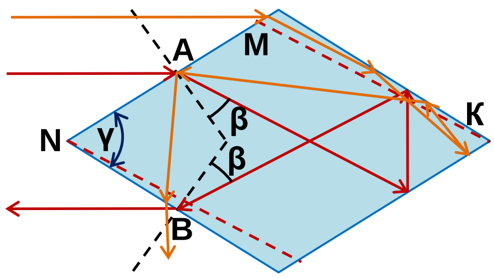



**Решение**: Начнем с доказательства вспомогательного утверждения. Рассмотрим луч, падающий на зеркало в виде двугранного угла с углом раствора $\gamma$. Пусть луч поочередно отражается от двух граней зеркала и выходит из него. Каков в этом случае будет угол между падающим и отраженным от зеркала лучом? Пусть угол падения равен $\alpha$. Тогда угол A в треугольнике ABC равен $90^\circ-\alpha$. Следовательно, угол C в этом же треугольнике равен $180^\circ-(90^\circ-\alpha)-\gamma=90^\circ+\alpha-\gamma$, и угол падения на вторую грань зеркала в точке C $\gamma-\alpha$. Теперь заметим, что в треугольнике ACD угол A равен $2\alpha$, а угол C равен $2\gamma-2\alpha$. Таким образом, угол D в этом треугольнике равен $180^\circ-2\gamma$, и угол между падающим и отраженным от зеркала лучом равен $2\gamma$, независимо от величины $\alpha$!




Теперь изучим ход лучей внутри призмы. Угол падения на грань призмы лучей пучка равен $90^\circ-\gamma/2$, а угол преломления определяется соотношением $\sin(\beta)=\frac{1}{n}\sin(90^\circ-\gamma/2)=\frac{1}{n}\cos(\gamma/2)$. С другой стороны, точно таким же должен быть угол падения луча на смежную грань перед выходом, чтобы вышедший луч шел точно в обратном направлении. Как мы знаем из вспомогательного утверждения, угол C в четырехугольнике ACBD равен $180^\circ-2\gamma$, а также ясно, что угол D в этом четырехугольнике равен $180^\circ-\gamma$ (пунктиром показаны перпендикуляры к граням призмы в точках A и B), в то время как два оставшихся угла равны $\beta$. Так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то $\beta=\gamma/2$. Следовательно, необходимым условием возможности описанного свойства лучей является уравнение $\sin(\gamma/2)=\frac{1}{n}\cos(\gamma/2)$, из которого следует, что $n=\mathrm{ctg}(\gamma/2)=\mathrm{ctg}(35^\circ)$. Проверим, является ли это условие достаточным. Теперь мы знаем, что $\beta=35^\circ$, и можем произвести построение хода лучей в призме. Как видно, лучи, падающие ниже точки M, действительно испытывают отражение от двух сторон двугранного угла, прежде чем выйти через обозначенную грань. Но могут быть лучи, идущие выше этой точки. Такие лучи попадают на грань, симметричную исходной относительно малой диагонали, и их путь до нужной грани проходит через 4 отражения, и они падают на нее под «неподходящим» углом – если ширина пучка такова, что в нем есть лучи, падающие выше точки M, то условие задачи не выполняется, и есть лучи, выходящие из смежной грани с углом поворота, отличным от 180°. Значит, требование $n=\mathrm{ctg}(\gamma/2)=\mathrm{ctg}(35^\circ)$ является необходимым, но не достаточным – для выполнения требований условия нужно, чтобы все точки падения лучей пучка принадлежали отрезку NM.




**ОТВЕТ**: $n=\mathrm{ctg}(\gamma/2)=\mathrm{ctg}(35^\circ)\approx 1{,}4$; условие задачи корректно, если все точки падения лучей пучка принадлежат отрезку NM (луч KM образует угол 15° с ближайшей гранью призмы). Ответ в виде числа не является обязательным.

**7, 8 и 9 классы**

**БИЛЕТ № 06**