

**10-11 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Робофест» по физике**

Задачи к вводному занятию 8.

Тема: «Конденсаторы и накопление энергии».

Задача 1 (2 балла) [конденсатор, емкость, энергия конденсатора]

У плоского конденсатора площадь пластин $S = 50 \text{ см}^2$, расстояние между ними $d = 1 \text{ мм}$, который заполнен диэлектриком с $\varepsilon = 5$, нанесены заряды $q_1 = +50 \text{ нКл}$ и $q_2 = -50 \text{ нКл}$. Найдите энергию электрического поля в конденсаторе. Ответ приведите в мкДж, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Конденсатор заряжен «антисимметрично» - заряды пластин одинаковы по величине и противоположны по направлению.

Подсказка 2: Емкость этого конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$.

Подсказка 3: Энергия поля $E_C = \frac{q^2}{2C}$.

Решение:

Конденсатор заряжен «антисимметрично» - заряды пластин одинаковы по величине и противоположны по направлению. Емкость этого конденсатора $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$. Энергия поля

$$E_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} \approx 11,3 \text{ мкДж}.$$

ОТВЕТ: 11,3.

Задача 2 (3 балла) [конденсатор, постоянный ток, параллельное соединение]

Конденсатор подключен к клеммам батареи параллельно с «шунтирующим» резистором, величина сопротивления которого в 5 раз больше внутреннего сопротивления батареи. На сколько процентов увеличится установившийся заряд на конденсаторе, если параллельно батарее подключить еще одну такую же? Ответ приведите с точностью до целого значения.

Подсказка 1: В случае одной батареи, после установления стационарного режима через шунтирующий резистор течет постоянный ток с $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$.

Подсказка 2: Поскольку конденсатор подключен параллельно резистору, то напряжение на нем равно $U_1 = I_1 R = \frac{R}{r + R} \mathcal{E} = \frac{5}{6} \mathcal{E}$.

Подсказка 3: Две параллельно соединенные батареи эквивалентны одной с той же ЭДС и с внутренним сопротивлением, соответствующим параллельному соединению двух сопротивлений r , то есть $r/2$.

Решение:

В случае одной батареи, после установления стационарного режима через шунтирующий резистор течет постоянный ток с $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$. Поскольку конденсатор подключен

параллельно резистору, то напряжение на нем равно $U_1 = I_1 R = \frac{R}{r + R} \mathcal{E} = \frac{5}{6} \mathcal{E}$. Значит,

$q_1 = CU_1 = \frac{5}{6} C\mathcal{E}$. Две параллельно соединенные батареи эквивалентны одной с той же ЭДС и с внутренним сопротивлением, соответствующим параллельному соединению двух сопротивлений r , то есть $r/2$. Поэтому $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r/2 + R}$, и $U_2 = I_2 R = \frac{2R}{r + 2R} \mathcal{E} = \frac{10}{11} \mathcal{E}$. Следовательно, $\frac{q_2}{q_1} = \frac{12}{11} \approx 1,09$, и установившийся заряд увеличился примерно на 9%.

ОТВЕТ: 9.

Задача 3 (3 балла) [конденсатор, постоянная времени зарядки]

Конденсатор емкостью $C = 100 \text{ мкФ}$ заряжается через сопротивление $R = 100 \text{ кОм}$ от источника с ЭДС $\mathcal{E} = 100 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением около 1 Ом . Чему примерно будет равен заряд конденсатора спустя время $t = 100 \text{ с}$ после начала зарядки? Ответ приведите в мКл, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Для ответа на этот вопрос нужно заметить, что постоянная времени зарядки $\tau = CR = 10 \text{ с}$.

Подсказка 2: Таким образом, $t \gg \tau$.

Подсказка 3: Значит, заданный момент времени соответствует поздней стадии зарядки, когда заряд конденсатора практически достиг установившегося значения.

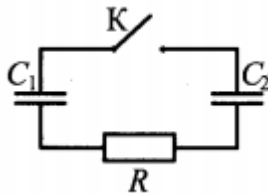
Решение:

Для ответа на этот вопрос нужно заметить, что постоянная времени зарядки $\tau = CR = 10 \text{ с}$, то есть заданный момент времени соответствует поздней стадии зарядки, когда заряд конденсатора практически достиг установившегося значения. Значит, $q(t) \approx C\mathcal{E} \approx 10 \text{ мКл}$.

ОТВЕТ: 10.

Задача 4 (3 балла) [конденсатор, энергия конденсатора]

В схеме, показанной на рисунке, емкости конденсаторов $C_1 = 10 \text{ мкФ}$ и $C_2 = 30 \text{ мкФ}$. Конденсатор C_1 заряжен до напряжения $U = 200 \text{ В}$, а конденсатор C_2 не заряжен. Какое количество тепла выделится в резисторе после замыкания ключа К? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь. Ответ приведите в Дж, с точностью до сотых.



Подсказка 1: По закону сохранения заряда новые заряды конденсаторов после установления равновесия $q_1 + q_2 = C_1 U$.

Подсказка 2: Перераспределение заряда заканчивается, когда напряжения на конденсаторах выравниваются: $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$.

Подсказка 3: Энергия системы конденсаторов после замыкания ключа и установления равновесия $E'_C = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{C_1^2 U^2}{2(C_1 + C_2)}$.

Решение:

После замыкания ключа заряд распределяется между двумя конденсаторами. Полный заряд неизменен, поэтому $q_1 + q_2 = C_1 U$. Перераспределение заряда заканчивается, когда напряжения на конденсаторах выравниваются: $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$. Из этих двух уравнений

находим: $q_1 = \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} U$ и $q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U$. Энергия системы конденсаторов до замыкания

ключа $E_C = \frac{C_1 U^2}{2}$, а после замыкания ключа и установления равновесия

$E'_C = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{C_1^2 U^2}{2(C_1 + C_2)}$. Это выражение также можно получить как энергию

составного конденсатора с емкостью $C_1 + C_2$, имеющего общий заряд $q_1 + q_2 = C_1 U$.

«Потерянная» конденсаторами энергия выделилась в виде тепла в резисторе:

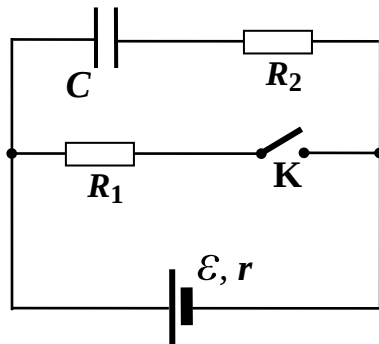
$$Q = E_C - E'_C = \frac{C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)} = 0,15 \text{ Дж.}$$

ОТВЕТ: 0,15.

Задача 5 (4 балла) [конденсатор, энергия конденсатора, работа источника]

В схеме, показанной на рисунке, ключ К длительное время был разомкнут. Какое количество тепла выделится в резисторе R_2 после замыкания ключа? Известно, что

$\mathcal{E} = 10 \text{ В}$, $C = 2 \text{ мкФ}$, а $\frac{R_1}{r} = 4$, а сопротивление R_2 намного больше остальных сопротивлений в схеме. Ответ запишите в мкДж, с точностью до целого значения.



Подсказка 1: До замыкания ключа конденсатор зарядился до напряжения, равного ЭДС источника, а после замыкания ключа и установления равновесия напряжение на конденсаторе стало равно напряжению на резисторе R_1 , то есть $U' = \frac{R_1}{R_1 + r} \mathcal{E} = \frac{4}{5} \mathcal{E}$.

Подсказка 2: Значит, через резистор R_2 протек заряд $\Delta q = C(\mathcal{E} - U') = \frac{1}{5} C \mathcal{E}$.

Подсказка 3: Поскольку сопротивление этого резистора очень большое, то выделением тепла в остальных элементах схемы можно пренебречь, и использовать «быстрый» метод подсчета.

Решение:

До замыкания ключа конденсатор зарядился до напряжения, равного ЭДС источника, то есть его заряд $q = C \mathcal{E}$. После замыкания ключа и установления равновесия напряжение на

конденсаторе стало равно напряжению на резисторе R_1 , то есть $U' = \frac{R_1}{R_1 + r} \mathcal{E} = \frac{4}{5} \mathcal{E}$.

Значит, через резистор R_2 протек заряд $\Delta q = C(\mathcal{E} - U') = \frac{1}{5} C \mathcal{E}$. При этом сразу после замыкания ключа (пока заряд на конденсаторе еще не успел измениться) напряжение на этом резисторе было равно $U_2 = \mathcal{E} - U' = \frac{1}{5} \mathcal{E}$. После установления равновесия ток через

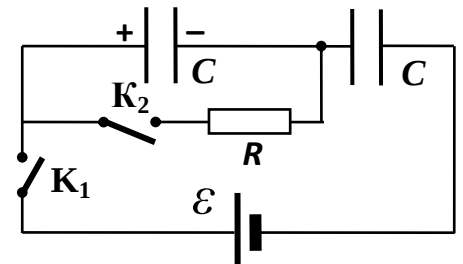
R_2 не течет, так что напряжение на нем падает до нуля. Поскольку сопротивление этого резистора очень большое, то выделением тепла в остальных элементах схемы можно пренебречь, и использовать «быстрый» метод подсчета: $Q = \frac{U_2 + 0}{2} \Delta q = \frac{C \mathcal{E}^2}{50} = 4 \text{ мкДж}$.

Тот же ответ можно получить из закона сохранения энергии, но при расчете по этому методу нужно учесть, что заряд через источник течет против его полярности, то есть источник совершает отрицательную работу!

ОТВЕТ: 4.

Задача 6 (4 балла) [конденсатор, энергия конденсатора, работа источника]

В схеме, показанной на рисунке, «левый» конденсатор изначально был заряжен до напряжения $U_0 = \mathcal{E}/2$, а «правый» - разряжен. Сначала замкнули ключ K_1 , а затем, спустя некоторое время - ключ K_2 . Какое количество тепла выделится в резисторе R после этого? Параметры схемы: $\mathcal{E} = 40 \text{ В}$, $C = 5 \text{ мкФ}$. Внутреннее сопротивление источника и сопротивление соединительных проводов пренебрежимо малы. Ответ приведите в мДж, с точностью до десятых.



Подсказка 1: После замыкания ключа K_1 источник дозаряжает батарею из двух конденсаторов одинаковой емкости. Из условия баланса напряжений $\frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C} = \mathcal{E}$, где q_1 и q_2 - это заряды «левого» и «правого» конденсаторов на этой стадии.

Подсказка 2: Закон сохранения заряда (сумма зарядов пластин конденсаторов, соединенных только друг с другом, не может измениться) приводит к соотношению $-q_1 + q_2 = -C \frac{\mathcal{E}}{2}$.

Подсказка 3: После замыкания ключа K_2 «левый» конденсатор оказывается закорочен резистором, и он полностью разряжается.

Решение:

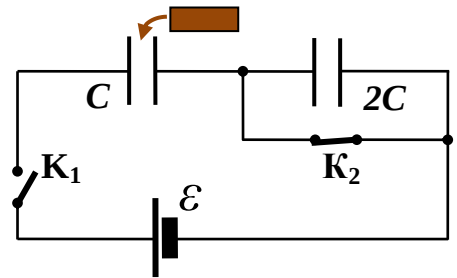
После замыкания ключа K_1 источник дозаряжает батарею из двух конденсаторов одинаковой емкости. Обозначим конечный заряд «левого» конденсатора на этой стадии q_1 , а «правого» - q_2 . Из условия баланса напряжений $\frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C} = \mathcal{E}$. Кроме того, по закону сохранения заряда (сумма зарядов пластин конденсаторов, соединенных только друг с другом, не может измениться) $-q_1 + q_2 = -C \frac{\mathcal{E}}{2}$. Поэтому новые заряды конденсаторов равны $q_1 = \frac{3C\mathcal{E}}{4}$ и $q_2 = \frac{C\mathcal{E}}{4}$. После замыкания ключа K_2 «левый» конденсатор оказывается закорочен резистором, и он полностью разряжается. В ходе

разряда через резистор протекает заряд $\Delta q' = \frac{3C\varepsilon}{4}$. Кроме того, через этот же резистор течет ток зарядки «правого» конденсатора, который должен зарядиться до заряда $C\varepsilon$ (напряжение на «левом» конденсаторе падает до нуля, а сумма напряжений должна уравнивать ЭДС источника). Для этого источнику нужно переместить на «правый» конденсатор заряд $\Delta q'' = \frac{3C\varepsilon}{4}$. Полный протекший через резистор после замыкания ключа K_2 заряд $\Delta q = \Delta q' + \Delta q'' = \frac{3C\varepsilon}{2}$. При этом напряжение на резисторе падало от начального значения $\frac{3\varepsilon}{4}$ до нуля по линейному (как функция протекшего заряда) закону. Значит, выделившееся в резисторе количество теплоты $Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\varepsilon}{4} \cdot \frac{3C\varepsilon}{2} = \frac{9C\varepsilon^2}{16} = 4,5 \text{ мДж}$. Такой же ответ можно получить и из закона сохранения энергии: $Q = A_{\text{ист}} - \Delta E_C$.

ОТВЕТ: 4,5.

Задача 7 (3 балла) [конденсатор, емкость]

В схеме, показанной на рисунке, конденсаторы изначально разряжены. После замыкания ключа K_1 заряд конденсатора с емкостью C стал равен $q = 5 \text{ мкКл}$. Затем ключ K_2 разомкнули, а после этого конденсатор C полностью заполнили диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 3$. Какой заряд после этого будет на конденсаторе емкостью $2C$? Ответ приведите в мкКл, с точностью до целого значения.



Подсказка 1: После замыкания ключа K_1 конденсатор с емкостью C заряжается до напряжения, равного ЭДС источника.
 Подсказка 2: После размыкания ключа K_2 баланс напряжений не нарушается – напряжение на конденсаторе с емкостью $2C$ (и его заряд) остается равным нулю.
 Подсказка 3: В результате заполнения первого конденсатора диэлектриком его емкость увеличивается до $C' = \varepsilon C$, и батарея конденсаторов дозаряжается.

Решение:

После замыкания ключа K_1 конденсатор с емкостью C заряжается до напряжения, равного ЭДС источника, то есть $q = C\varepsilon$. После размыкания ключа K_2 баланс напряжений не нарушается – напряжение на конденсаторе с емкостью $2C$ (и его заряд) остается равным нулю. В результате заполнения первого конденсатора диэлектриком его емкость увеличивается до $C' = \varepsilon C$, и батарея конденсаторов дозаряжается. Обозначим Δq заряд, перемещенный источником в процессе дозарядки. Тогда новый заряд конденсатора с емкостью εC будет равен $q + \Delta q$, а заряд конденсатора с емкостью $2C$ станет Δq .

Условие баланса напряжений: $\frac{q + \Delta q}{\varepsilon C} + \frac{\Delta q}{2C} = \frac{q}{C} \Rightarrow \Delta q = \frac{2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} q = 4 \text{ мкКл}$.

ОТВЕТ: 5,0.

Задача 8 (5 баллов) [конденсатор, энергия конденсатора, работа источника]

Пластины плоского воздушного конденсатора шириной $a = 50$ см и высотой $H = 80$ см установлены вертикально на малом расстоянии $d = 1$ мм друг от друга. Нижние края пластин касаются поверхности жидкого диэлектрика, налитого в резервуар большого объема. Плотность диэлектрика равна $\rho = 2$ г/см³, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 5$. Конденсатор через провода с малым сопротивлением подключается к источнику постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 20$ кВ и малым внутренним сопротивлением. Пренебрегая излучением, найти количество теплоты, выделившееся в этой системе. Ответ запишите в мДж, с точностью до сотых. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с².

Подсказка 1: После появления поля в конденсаторе диэлектрик начнет втягиваться в зазор между пластинами. Ввиду малости сопротивлений в цепи зарядки можно считать, что зарядка происходит значительно быстрее перемещения жидкости, и поэтому для каждого значения высоты ее поднятия h заряд конденсатора имеет величину $q(h) = C(h)\mathcal{E}$, где $C(h)$ - емкость конденсатора, частично заполненного диэлектриком.

Подсказка 2: Частично заполненный диэлектриком конденсатор можно рассматривать как параллельное соединение конденсатора, заполненного диэлектриком (с емкостью $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a h}{d}$) и воздушного конденсатора ($C_2 = \frac{\varepsilon_0 a (H - h)}{d}$).

Подсказка 3: В процессе подъема жидкости конденсатор дозарядается, источник совершает работу $A(h) = \mathcal{E}^2 [C(h) - C(0)]$ за счет изменения своей внутренней энергии $\Delta E_{ист} = -A(h)$. Эта работа идет на увеличение энергии конденсатора, увеличение потенциальной энергии жидкости в поле тяжести и увеличение кинетической энергии жидкости. Часть работы источника тратится на компенсацию тепловых потерь в контуре дозарядки, и часть кинетической энергии жидкости переходит в тепло из-за трения.

Подсказка 4: Закон сохранения энергии в системе «источник-конденсатор-жидкость» в процессе дозарядки можно записать в виде $\Delta E_{ист} + E_{кин} + \Delta E_C + E_g + Q = 0$, где

$$E_g = m(h) g \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \rho g a d h^2 \text{ и } \Delta E_C = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 [C(h) - C(0)] = + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) a \mathcal{E}^2}{2d} h.$$

Решение:

После появления поля в конденсаторе диэлектрик начнет втягиваться в зазор между пластинами. Ввиду малости сопротивлений в цепи зарядки можно считать, что зарядка происходит значительно быстрее перемещения жидкости, и поэтому для каждого значения высоты ее поднятия h заряд конденсатора имеет величину $q(h) = C(h)\mathcal{E}$, где $C(h)$ - емкость конденсатора, частично заполненного диэлектриком. Найти эту емкость достаточно легко: частично заполненный диэлектриком конденсатор можно рассматривать как параллельное соединение конденсатора, заполненного диэлектриком (с емкостью $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a h}{d}$) и воздушного конденсатора ($C_2 = \frac{\varepsilon_0 a (H - h)}{d}$). Поэтому

$$C(h) = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 a}{d} [H + (\varepsilon - 1)h].$$

Итак, сначала конденсатор получит заряд $q_0 = C(0)\mathcal{E}$, затем начнется движение жидкости и дозарядка конденсатора. Проанализируем энергетический баланс в системе в ходе дозарядки.

Источник совершает работу $A(h) = \mathcal{E}^2 [C(h) - C(0)]$ за счет изменения своей внутренней энергии $\Delta E_{ист} = -A(h)$. Эта работа идет на увеличение энергии конденсатора, увеличение потенциальной энергии жидкости в поле тяжести и увеличение кинетической энергии жидкости. Часть работы источника тратится на компенсацию тепловых потерь в контуре

дозарядки, и часть кинетической энергии жидкости переходит в тепло из-за трения. Таким образом, закон сохранения энергии в системе «источник-конденсатор-жидкость» в процессе дозарядки можно записать в виде

$$\Delta E_{уст} + E_{кин} + \Delta E_C + E_g + Q = 0,$$

если отсчитывать потенциальную энергию столба жидкости в поле тяжести E_g от уровня $h=0$ и считать, что Q - полное тепло, выделяющееся в системе. Подставим в это выражения значения величин

$$\Delta E_{уст} = -A(h) = -\mathcal{E}^2 [C(h) - C(0)] = -\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) a \mathcal{E}^2}{d} h,$$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 [C(h) - C(0)] = +\frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) a \mathcal{E}^2}{2d} h$$

(видно, что до конденсатора «доходит» ровно половина энергии, потраченной источником) и

$$E_g = m(h) g \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \rho g a d h^2.$$

В результате получим:

$$E_{кин} + Q + \frac{1}{2} \rho g a d h^2 - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) a \mathcal{E}^2}{2d} h = 0.$$

Нетрудно заметить, что сумма двух последних слагаемых играет роль «потенциальной энергии» системы, причем график зависимости

$$U(h) = \frac{1}{2} \rho g a d h^2 - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) a \mathcal{E}^2}{2d} h$$

есть парабола с точкой минимума $h_0 = \frac{h_{\max}}{2} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathcal{E}^2}{2 \rho g d^2}$.

Поэтому жидкость будет совершать затухающие колебания при $t > 0$: $0 < h(t) < h_{\max}$, и после их завершения остановится на уровне, отвечающем положению равновесия $h = h_0$. Так как кинетическая энергия при этом стремится к нулю, то полное выделяющееся тепло

$$Q = -U(h_0) = -\frac{1}{2} \left(\rho g a d h_0^2 - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) a \mathcal{E}^2}{d} h_0 \right) = \frac{\varepsilon_0^2 (\varepsilon - 1)^2 a \mathcal{E}^4}{8 \rho g d^3} \approx 0,63 \text{ мДж}.$$

Хотя высота пластин конденсатора H не входит в это выражение, его необходимо знать для проверки корректности решения. Дело в том, что при $h_{\max} > H$ в процессе колебаний часть жидкости может выплеснуться из конденсатора, и тогда проведенные рассуждения

необходимо корректировать. У нас $H > \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathcal{E}^2}{\rho g d^2} \approx 71 \text{ см}$, и рассуждения корректны.

ОТВЕТ: 0,63.