10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задачи к вводному занятию 5.

Тема: «Молекулярная физика».

Задача 1 (2 балла) [температура, уравнение Менлелеева-Клапейрона]
Определить давление смеси 21 г азота и 40 г кислорода в баллоне объемом 25 л при температуре 58°С. Молярные массы азота и кислорода $\mu_1 = 28$ г/моль и $\mu_2 = 32$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К). Ответ приведите в кПа, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Из уравнения Менделеева-Клапейрона выражаем давление газа: $pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{\nu RT}{V}$.

Подсказка 2: С учетом закона Дальтона, давление смеси двух газов, находящихся в одном и том же объеме $p = (\nu_1 + \nu_2)\frac{RT}{V}$.

Подсказка 3: В баллоне находятся $\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1} = 0{,}75$ моля азота и $\nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2} = 1{,}25$ моля кислорода.

Решение:

Из уравнения Менделеева-Клапейрона выражаем давление газа: $pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow p = \frac{\nu RT}{V}$. С учетом закона Дальтона, давление смеси двух газов, находящихся в одном и том же объеме $p = (\nu_1 + \nu_2)\frac{RT}{V}$. В баллоне находятся $\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1} = 0{,}75$ моля азота и $\nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2} = 1{,}25$ моля кислорода, поэтому $p = (\nu_1 + \nu_2)\frac{RT}{V} \approx 220$ кПа.

ОТВЕТ: 220.

Задача 2 (2 балла) [молекулы, тепловое движение]
Во сколько раз средняя скорость теплового движения молекул водорода в воздухе при нормальных условиях больше, чем скорость молекул углекислого газа? Молярные массы водорода и углекислого газа $\mu_1 = 2$ г/моль и $\mu_2 = 44$ г/моль. Ответ запишите с точностью до десятых.

Подсказка 1: У молекулы три степени свободы поступательного движения (вдоль трех независимых осей в пространстве).

Подсказка 2: Поэтому $\frac{mv^2}{2} \approx \frac{3}{2}kT \Rightarrow v \approx \sqrt{\frac{3kT}{m}}$.

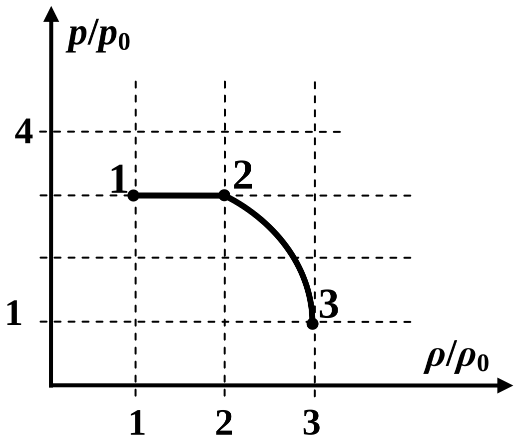
Подсказка 3: С учетом того, что молярная масса связана с массой молекулы $\mu = mN_A$, а константа Больцмана – с универсальной газовой постоянной, находим: $v \approx \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

Решение:

Скорость молекулы определяется по кинетической энергии ее поступательного движения. Ясно, что у молекулы три степени свободы поступательного движения (вдоль трех независимых осей в пространстве). Поэтому для средних значений примерно справедливо равенство $\frac{mv^2}{2} \approx \frac{3}{2}kT \Rightarrow v \approx \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. С учетом того, что молярная масса связана с массой молекулы $\mu = mN_A$, а константа Больцмана – с универсальной газовой постоянной, находим: $v \approx \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Поэтому $\frac{v_1}{v_2} \approx \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \approx 4{,}7$.

ОТВЕТ: 4,7.

Задача 3 (3 балла) [диаграммы состояния, уравнение Менделеева-Клапейрона]
На рисунке показана диаграмма процесса с постоянным количеством идеального газа в координатах давление-плотность. Температура газа в состоянии 1 равна 630 К. Найдите его температуру в состоянии 3. Ответ запишите в К.



. .

Подсказка 1: Нужно выразить искомую величину (температуру) через величины отложенные по осям, с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона.

Подсказка 2: Нужно учесть, что $\rho = \frac{m}{V}$.

Подсказка 3: $T = \frac{\mu}{R}\frac{p}{\rho}$.

Решение:

Выразим искомую величину (температуру) через величины отложенные по осям, с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона: с учетом того, что $\rho = \frac{m}{V}$ получим, что $pV = \frac{m}{\mu}RT \Rightarrow T = \frac{\mu}{R}\frac{p}{\rho}$. Тогда ясно, что $\frac{T_1}{T_3} = \frac{p_1}{p_3}\frac{\rho_3}{\rho_1} = 9$. Значит, $T_3 = \frac{T_1}{9} = 70$ К.

ОТВЕТ: 70.

Задача 4 (3 балла) [идеальный газ, уравнение Менделеева-Клапейрона]
Вертикальная герметичная цилиндрическая труба высотой 5 м с гладкими стенками разделена на две части подвижным поршнем. Масса поршня 20 кг. В нижней части находится 6 молей гелия, в верхней – 2 моля гелия. Температура гелия в обоих частях равна 28°С. На какой высоте над дном трубы располагается поршень в состоянии равновесия? Ответ запишите в сантиметрах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Пусть ν – количество газа над поршнем. Тогда уравнение состояния для каждой порции газа – это $p_1Sh = 3\nu RT$ и $p_2S(H-h) = \nu RT$.

Подсказка 2: Условия равновесия поршня: $mg + p_2S = p_1S$.

Подсказка 3: В это уравнение нужно подставить выражения сил давления (pS) из уравнений состояния.

Решение:

Пусть ν – количество газа над поршнем. Тогда количество газа под поршнем можно обозначить 3ν . Запишем уравнение состояния для каждой порции газа: $p_1Sh = 3\nu RT$ и $p_2S(H-h) = \nu RT$. Положение поршня определяется из условия равновесия: $mg + p_2S = p_1S$. Подставив в него выражения сил давления из уравнений состояния, получим:

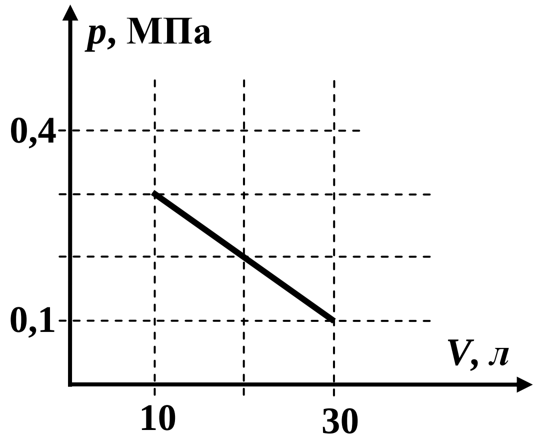
$$\frac{3\nu RT}{h} - \frac{\nu RT}{H-h} = mg \Rightarrow \left(\frac{h}{H}\right)^2 - \left(1 + 4\frac{\nu RT}{mgH}\right)\frac{h}{H} + 3\frac{\nu RT}{mgH} = 0$$

В нашем случае $\frac{\nu RT}{mgH} \approx 0{,}5$, поэтому нужный корень уравнения (ясно, что $\frac{h}{H} < 0{,}5$) дает: $\frac{h}{H} \approx \frac{3-\sqrt{7{,}5}}{2} \approx 0{,}634 \Rightarrow h \approx 317\,\text{см}$.

ОТВЕТ: 317.

Задача 5 (4 балла) [диаграммы состояния, уравнение Менделеева-Клапейрона]

На рисунке показана диаграмма процесса над 1 молем идеального газа. Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. Ответ записать в кельвинах, с точностью до целого значения.



Подсказка 1: Уравнение этого процесса – линейная функция, которую можно записать следующим образом: $p(V) = p_0\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)$, где, как видно из рисунка $p_0 = 0{,}4\,\text{МПа}$ и $V_0 = 40\,\text{л}$.

Подсказка 2: С помощью уравнения Менделеева-Клапейрона можно выразить температуру газа как функцию объема: $pV = \nu RT \Rightarrow T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{p_0V_0}{\nu R}\frac{V}{V_0}\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)$.

Подсказка 3: Функция $y = x(1-x)$ достигает максимального значения при $x = 0{,}5$.

Решение:

Уравнение этого процесса – линейная функция, которую можно записать следующим образом: $p(V) = p_0\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)$, где, как видно из рисунка $p_0 = 0{,}4\,\text{МПа}$ и $V_0 = 40\,\text{л}$. Выразим температуру газа как функцию объема с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона: $pV = \nu RT \Rightarrow T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{p_0V_0}{\nu R}\frac{V}{V_0}\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)$. Так как функция $y = x(1-x)$ достигает максимального значения при $x = 0{,}5$, то максимальная температура в этом процессе достигается при $V = \frac{1}{2}V_0 = 20$ л. Этой точке отвечает давление $p = 0{,}2$ МПа, поэтому $T_{\max} = \frac{pV}{\nu R} \approx 481$ К.

ОТВЕТ: 481.

Задача 6 (4 балла) [идеальный газ, уравнение Менделеева-Клапейрона]
В гладкой горизонтальной трубке постоянного сечения, запаянной с одного конца и заполненной атмосферным воздухом, помещен столбик ртути длиной $l = 3$см. Столбик ртути покоится при неизменном давлении внешнего атмосферного воздуха $p_0 = 750$мм.рт.ст. Трубку повернули вертикально запаянным концом вниз. На сколько градусов (К) надо медленно нагреть воздух в трубке, чтобы столбик ртути вернулся в исходное положение при том же давлении внешнего воздуха? Температура окружающего воздуха $t_0 = 27°C$, ответ округлить до целого значения.
Подсказка 1: так как изначально столбик ртути покоился, давление воздуха в трубке равнялось давлению внешнего воздуха.
Подсказка 2: при вертикальном положении трубки равновесие столбика ртути достигается в положении, когда разность давлений уравновешивает вес ртути: $\rho Slg = (p - p_0)S$.
Подсказка 3: если V - объем воздуха в трубке при исходном положении столбика ртути, то уравнение состояния ν молей воздуха в горизонтальной трубке: $p_0V = \nu RT_0$, а в вертикальной после нагрева: $pV = \nu RT$.

Решение:

Так как изначально столбик ртути покоился, давление воздуха в трубке равнялось давлению внешнего воздуха. Если обозначить V объем воздуха в трубке при исходном положении столбика ртути, а ν – количество воздуха в трубке, то уравнение состояния этого воздуха имеет вид: $p_0V = \nu RT_0$. После поворота трубки в вертикальное положение и нагрева столбик ртути должен вернуться в исходное положение (нагрев медленный, поэтому считаем это положение равновесным), и уравнение состояния примет вид $pV = \nu RT$. Таким образом: $p = p_0\frac{T}{T_0}$, где $T_0 \approx 300$ К. Кроме того, поскольку при вертикальном положении трубки равновесие столбика ртути достигается в положении, когда разность давлений уравновешивает вес ртути, то: $\rho Slg = (p - p_0)S$. Отсюда находим:

$$\rho lg = p_0\frac{T - T_0}{T_0} \Rightarrow \Delta T = T - T_0 = \frac{\rho lg}{p_0}T_0 = 12\text{ К}.$$

Ответ: 12.

Задача 7 (3 балла) [уравнение теплового баланса]
В калориметр, содержащий $V = 6$ воды при температуре $t_1 = 21°\text{C}$, опустили $m = 1$кг льда с температурой $t_2 = -42°\text{C}$. Определить температуру содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Удельная теплота плавления используемого льда $\lambda = 343$кДж/кг, удельная теплоемкость воды равна $c_B = 4{,}2$ кДж/(кг·°С), удельная теплоемкость льда равна $c_Л = 2{,}1$кДж/(кг·°С), теплоемкостью калориметра можно пренебречь. Ответ запишите в °С, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Нужно ввести предположение о конечном состоянии системы.
Подсказка 2: Например, можно составить уравнение теплового баланса, предполагая, что весь лед растает.

Подсказка 3: Тогда конечная температура будет определяться из уравнения: $c_B M(t_1 - t) - \lambda m - c_Л m(t_0 - t_2) - c_B m(t - t_0) = 0$, после решения которого нужно проверить предположение.

Решение:

Масса воды $M = 6$кг. Составим уравнение теплового баланса, предполагая, что <u>весь лед</u> растает:

$$c_B M(t_1 - t) - \lambda m - c_Л m(t_0 - t_2) - c_B m(t - t_0) = 0$$

(здесь $t_0 = 0^0 C$ - температура плавления льда). Отсюда находим:

$$t = \frac{M}{M+m} t_1 + \frac{c_Л m}{c_B(M+m)} t_2 - \frac{\lambda m}{c_B(M+m)} \approx +3.3^0 C.$$

Отметим, что полученное значение положительно, что подтверждает сделанное предположение.

ОТВЕТ: 3,3.

Задача 8 (5 баллов) [уравнение теплового баланса]

Красная планета Плюм заселена разноцветными бракадашками. Что бы получить очередного бракадашку яйцо опускают в глубокий колодец, на дне которого находится неизвестная жидкость, называемая «живая вода». Цвет бракадашки зависит от температуры живой воды (см. таблицу). Колодец с живой водой священен, из него нельзя зачерпывать воду и в него нельзя опускать ничего кроме яиц бракадашек и специального груза из неизвестного на Земле сплава.

Таблица:

t,°C	цвет	№ цвета
0 - 10	**черный**	**1**
10 - 20	**фиолетовый**	**2**
20 - 30	**синий**	**3**
30 - 40	**голубой**	**4**
40 - 50	**зеленый**	**5**
50 - 60	**желтый**	**6**
60 - 70	**оранжевый**	**7**
70 - 80	**красный**	**8**
80 -90	**коричневый**	**9**
90-100	**белый**	**10**

Алисе надо обязательно узнать какого цвета бракадашки будут вылупляться сегодня. У нее есть калориметр, который очень хорошо сохраняет температуру, и градусник. Наполнив калориметр водой с температурой, равной $t_1 = 20°C$, она опустила туда груз, который до этого находился в колодце с живой водой. Через некоторое время в калориметре устанавливается температура, равная $t_2 = 22{,}7°C$. Измерив t_2, Алиса снова поместила груз в колодец, а потом опять поместила его в калориметр. Тогда температура воды в калориметре оказалась равной $t_3 = 25{,}2°C$. После этого в колодец отправилось яйцо бракадашки. Какого цвета вылупится бракадашка? В ответе укажите номер цвета.

Подсказка 1: Для определения цвета необходимо найти t - температуру живой воды на момент проведения опыта.

Подсказка 2: Уравнение теплового баланса для процесса нагревания груза после первого погружения: $C(t - t_2) = C_K(t_2 - t_1)$, где C и C_K – теплоемкости груза и калориметра с водой соответственно.

Подсказка 3: При втором погружении $C(t - t_3) = C_K(t_3 - t_2)$.

Решение:

Ясно, что для определения цвета необходимо найти t - температуру живой воды на момент проведения опыта. Уравнение теплового баланса для процесса нагревания груза после первого погружения:

$$C(t-t_2)=C_K(t_2-t_1),$$

где C и C_K – теплоемкости груза и калориметра с водой соответственно. При втором погружении

$$C(t-t_3)=C_K(t_3-t_2).$$

Из этих равенств находим:

$$\frac{t-t_3}{t-t_2}=\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}\Rightarrow t=\frac{t_2^2-t_1t_3}{2t_2-t_1-t_3}.$$

Для заданных числовых значений: $t=\dfrac{t_2^2-t_1t_3}{2t_2-t_1-t_3}=56{,}45°C$, что соответствует желтому цвету бракадашки (№ 6).

ОТВЕТ : 6.

Задача 9 (5 баллов) [уравнение теплового баланса]

К дню рождения мамы Вова (ученик 8 класса) решил сварить компот. Он смешал в кастрюле воду, изюм, орехи, мед и килограмм варенья, и поставил кастрюлю на плиту. Через $T=25$ минут компот закипел. Вова испугался и долил туда холодной воды. До какой температуры охладился компот, если в следующий раз он закипел через $\tau=4$ минуты? Компот кипит при $t_1=100°C$, температура изначальных ингредиентов и холодной воды $t_0=20°C$. Можно считать, что скорость поступления тепла от плиты к содержимому кастрюли и скорость утечки тепла из кастрюли в окружающую среду практически постоянны. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до целого значения.

Подсказка 1: Уравнение теплового баланса для закипания компота: $NT=C_K(t_1-t_0)$, где N – скорость поступления тепла в кастрюлю (мощность, отдаваемая плитой минус мощность потерь в окружающую среду), которая считается неизменной, а C_K – теплоемкость кастрюли вместе с компотом.

Подсказка 2: Уравнение теплового баланса для охлаждения компота: $C_K(t_1-t)=C_B(t-t_0)$, где C_B – теплоемкость долитой воды.

Подсказка 3: Уравнение теплового баланса для второго закипания компота: $N\tau=(C_K+C_B)(t_1-t)$.

Решение:

Пусть N – скорость поступления тепла в кастрюлю (мощность, отдаваемая плитой минус мощность потерь в окружающую среду), которая считается неизменной. Обозначим также C_K – теплоемкость кастрюли вместе с компотом, C_B – теплоемкость долитой воды.

Тогда уравнение теплового баланса для закипания компота: $NT=C_K(t_1-t_0)$, откуда выразим $\dfrac{N}{C_K}=\dfrac{t_1-t_0}{T}$. Уравнение теплового баланса для охлаждения компота: $C_K(t_1-t)=C_B(t-t_0)$, где t - искомая температура. Отсюда следует, что $\dfrac{C_B}{C_K}=\dfrac{t_1-t}{t-t_0}$. Наконец, запишем уравнение теплового баланса для второго закипания компота: $N\tau=(C_K+C_B)(t_1-t)$. Разделив обе части этого равенства на C_K и используя ранее полученные соотношения, получаем:

$$\frac{N}{C_K}\tau=\left(1+\frac{C_B}{C_K}\right)(t_1-t)\Rightarrow t=\frac{Tt_1+\tau t_0}{T+\tau}\approx 89°C.$$

ОТВЕТ: 89.