

**7-9 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Робофест» по физике**

Задачи к вводному занятию 4.

Тема: «Вращение».

Задача 1 (2 балла) [радианная мера угла]

Тяжелый шарик вращается на легкой натянутой нити длиной $L = 4$ м. Величина его скорости постоянна и равна $v = 5$ м/с. Найти угол поворота нити за время $t = 2$ с. Ответ приведите в градусах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Шарик за это время пройдет путь $s = vt = 10$ м.

Подсказка 2: Радиус описываемой им окружности равен L .

Подсказка 3: Поэтому угол поворота в радианах $\varphi = \frac{s}{L} = 2,5 \text{ рад}$.

Решение: Шарик за это время пройдет путь $s = vt = 10$ м. Радиус описываемой им окружности равен L . Поэтому угол поворота в радианах $\varphi = \frac{s}{L} = 2,5 \text{ рад}$. Таким образом,
$$\varphi = 2,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 143^\circ.$$

ОТВЕТ: 143.

Задача 2 (1 балл) [угловая скорость]

Карусель вращается с угловой скоростью $\omega = 0,15 \text{ рад/с}$. При этом небольшой шарик, укрепленный на ее внешнем радиусе, движется со скоростью $v = 1,8$ м/с. Найдите внешний радиус карусели. Ответ запишите в метрах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Согласно уравнению связи линейной и угловой скорости $v = \omega R$.

Подсказка 2: Поэтому $R = \frac{v}{\omega}$.

Решение: Согласно уравнению связи линейной и угловой скорости $v = \omega R$. Поэтому
$$R = \frac{v}{\omega} = 12 \text{ м}.$$

ОТВЕТ: 12.

Задача 3 (2 балла) [угловая скорость, центростремительное ускорение]

Материальная точка движется по окружности, совершая полный оборот за время $T = 3,14$ с. При этом величина ее мгновенного ускорения постоянна и равна $a = 6 \text{ м/с}^2$. Найдите радиус окружности. Ответ приведите в метрах, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Так как модуль ускорения постоянен, то вращение равномерное.

Подсказка 2: Величина угловой скорости $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Подсказка 3: Величина ускорения $a = \omega^2 R$.

Решение: Так как модуль ускорения постоянен, то вращение равномерное. Величина угловой скорости $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Поэтому величина ускорения $a = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$. Таким образом,
$$R = \frac{aT^2}{4\pi^2} \approx 1,5 \text{ м}.$$

ОТВЕТ: 1.5.

Задача 4 (3 балла) [угловая скорость, сложение векторов]

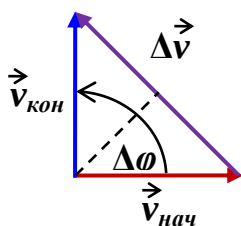
Материальная точка движется равномерно по окружности. При этом оказывается, что $\Delta t = 1,57$ с – это минимальная длительность интервала, за который скорость точки $\vec{v}$ изменяется на вектор $\Delta \vec{v}$, модуль которого в $\sqrt{2}$ раз больше, чем модуль самой скорости. Определите величину угловой скорости точки. Ответ запишите в рад/с, округлив до десятых.

Подсказка 1: Для минимальности времени переправы катер должен двигаться по прямой, развивая свою максимальную скорость.

Подсказка 2: Нужно построить векторный треугольник, определяющий скорость катера относительно берега $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$ так, чтобы $\vec{v}'$ была ориентирована вдоль нужного курса.

Подсказка 3: Удобно записать это равенство в проекциях на направления перпендикулярно курсу катера и вдоль него.

Решение:



При повороте неизменного по величине вектора скорости равномерного вращения на угол $\Delta\varphi$ величина изменения скорости $|\Delta\vec{v}| = 2|\vec{v}|\sin(\Delta\varphi/2)$. Поэтому отношению $\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \sqrt{2}$

соответствует $\sin(\Delta\varphi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Минимальный угол поворота, при котором выполняется это

требование $\Delta\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ рад. Значит, угловая скорость $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \approx 1,0$ рад/с.

ОТВЕТ: 1,0.

Задача 5 (3 балла) [вращение, скорость, центростремительное ускорение]

Небольшой груз вращается по окружности радиуса 4 м. Модуль его ускорения остается постоянным и равным $6,25$ м/с², при этом ускорение всегда направлено к центру окружности. Найти путь, который проходит груз за 2 с. Ответ запишите в метрах, округлив до целого значения.

Подсказка 1: У груза есть только центростремительное ускорение, поэтому груз вращается равномерно.

Подсказка 2: При равномерном вращении $a = \frac{v^2}{R}$.

Подсказка 3: Величина скорости груза $v = \sqrt{aR}$.

Решение:

Ускорение направлено к центру окружности, то есть у груза есть только центростремительное ускорение. Следовательно, груз вращается равномерно. При равномерном вращении $a = \frac{v^2}{R}$, поэтому величина скорости груза $v = \sqrt{aR} = 5$ м/с. Путь груза $s = vt = t\sqrt{aR} = 10$ м.

ОТВЕТ: 10.

Задача 6 (3 балла) [равномерное вращение, ускорение]

Небольшое тело вращается равномерно по окружности с периодом $T = 6$ с. Во сколько раз величина среднего ускорения за время $t = 2$ с меньше модуля мгновенного ускорения? Ответ запишите в виде правильной десятичной дроби, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Модуль мгновенного ускорения тела $a = \frac{v^2}{R}$ с учетом того, что период обращения $T = \frac{2\pi R}{v}$, можно выразить через величину скорости и период обращения:

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Подсказка 2: Модуль среднего ускорения $|\vec{a}_{cp}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{t}$ с учетом того, что $|\Delta\vec{v}| = 2v\sin(\Delta\varphi/2)$, (где $\Delta\varphi$ – угол поворота вектора скорости за время t) можно записать как

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{2v\sin(\Delta\varphi/2)}{t}.$$

Подсказка 3: Так как $t = \frac{T}{3}$, то за это время тело пройдет треть окружности, и $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$ рад.

Решение:

Модуль мгновенного ускорения тела $a = \frac{v^2}{R}$ с учетом того, что период обращения $T = \frac{2\pi R}{v}$,

можно выразить через величину скорости и период обращения: $a = \frac{2\pi v}{T}$. Модуль среднего

ускорения $|\vec{a}_{cp}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{t}$ с учетом того, что $|\Delta\vec{v}| = 2v\sin(\Delta\varphi/2)$, (где $\Delta\varphi$ – угол поворота

вектора скорости за время t) можно записать как $|\vec{a}_{cp}| = \frac{2v\sin(\Delta\varphi/2)}{t}$. Так как $t = \frac{T}{3}$, то за

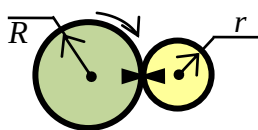
это время тело пройдет треть окружности, и $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$ рад. Значит, $|\vec{a}_{cp}| = \sqrt{3} \frac{v}{t}$.

Следовательно, $\frac{a}{|\vec{a}_{cp}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{t}{T} \approx 1,2$.

ОТВЕТ: 1,2.

Задача 7 (3 балла) [равномерное вращение, скорость, отсутствие проскальзывания]

В некотором механизме ведущая шестеренка радиуса R вращается с угловой скоростью $\Omega = 2$ рад/с. Эта шестеренка приводит в движение шестеренку меньшего радиуса, равного $r = \frac{R}{n}$, где $n = 1,5$. Шестеренки вращаются без проскальзывания. Оси обеих шестеренок покоятся относительно корпуса механизма. На ободе каждой шестеренки поставлена метка. В момент времени $t = 0$ эти метки соприкоснулись. В какой момент времени эти метки в первый раз будут двигаться во взаимно-перпендикулярных направлениях в системе отсчета, связанной с корпусом механизма? Ответ записать в миллисекундах, с точностью до целого значения.



Подсказка 1: Из геометрии ясно, что угол между векторами скорости меток равен сумме их углов поворота от того положения, в котором они были сонаправлены.

Подсказка 2: Условие отсутствия проскальзывания дает $\Omega R = \omega r$.

Подсказка 3: Угол поворота метки на большой шестеренке $\Phi(t) = \Omega t$.

Решение:

Из геометрии ясно, что угол между векторами скорости меток равен сумме их углов поворота от того положения, в котором они были сонаправлены. Угол поворота метки на большой шестеренке $\Phi(t) = \Omega t$. Условие отсутствия проскальзывания дает $\Omega R = \omega r$, и поэтому угловая

скорость вращения малой шестеренки $\omega = \frac{R}{r} \Omega$. Поэтому угол поворота метки на малой

шестеренке $\varphi(t) = \frac{R}{r} \Omega t$, и условие перпендикулярности скоростей при минимальном угле

поворота – это $\frac{\pi}{2} = \Phi(t) + \varphi(t) = \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \Omega t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2(n+1)\Omega} \approx 0,314 \text{ с}$.

ОТВЕТ: 314.

Задача 8 (5 баллов) [вращение, переносная скорость, относительная скорость]

В некотором механизме ведущая шестеренка радиуса R вращается с угловой скоростью Ω . Эта шестеренка приводит в движение шестеренку меньшего радиуса, равного r . Шестеренки вращаются без проскальзывания. Оси обеих шестеренок покоятся относительно корпуса механизма. На ободе каждой шестеренки поставлена метка. В момент времени $t = 0$ эти метки соприкоснулись. Определите скорость метки на малой шестеренке относительно метки на большой шестеренке к моменту времени, соответствующему четверти периода вращения малой шестеренки, если $\Omega = 5$ рад/с, $R = 14$ см, $r = 10$ см. Ответ запишите в м/с, при необходимости округлив до десятых.

Подсказка 1: Скорость метки А на малой шестеренке относительно метки В на большой равна векторной разности скорости А и переносной скорости: $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_A - \vec{v}_{пер}$.

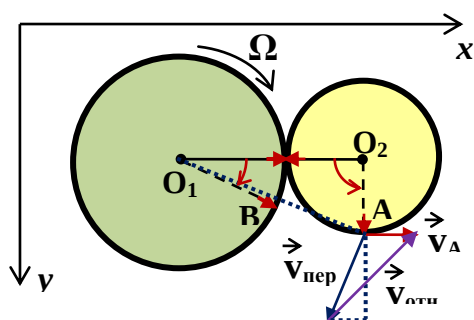
Подсказка 2: Скорость метки А $\vec{v}_A$ направлена перпендикулярно радиусу O_2A (вдоль введенной на рисунке оси x) и равна по величине $v_A = \omega r = \frac{R}{r} \Omega r = \frac{7}{5} \Omega r$.

Подсказка 3: Расстояние от оси вращения большой шестеренки до А в этот момент времени $|O_1A| = \sqrt{(R+r)^2 + r^2} = \frac{13}{5} r$.

Подсказка 4: Переносная скорость для А направлена перпендикулярно O_1A и равна по величине $v_{пер} = \Omega \cdot |O_1A|$.

Решение:

Скорость метки А на малой шестеренке относительно метки В на большой равна векторной разности скорости А и переносной скорости: $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_A - \vec{v}_{пер}$. За четверть периода вращения малой шестеренки А повернется на 90° , и ее новое положение показано на рисунке.



Скорость метки А $\vec{v}_A$ направлена перпендикулярно радиусу O_2A (вдоль введенной на рисунке оси x) и равна по величине $v_A = \omega r = \frac{R}{r} \Omega r = \frac{7}{5} \Omega r$. Расстояние от оси вращения большой шестеренки до А в этот момент времени $|O_1A| = \sqrt{(R+r)^2 + r^2} = \frac{13}{5} r = 26 \text{ см}$. Значит, переносная скорость для А направлена перпендикулярно O_1A и равна по величине $v_{пер} = \Omega \cdot |O_1A| = \frac{13}{5} \Omega r$. С учетом того, что треугольник, образованный вектором $\vec{v}_{пер}$ и его проекциями на оси x и y , подобен треугольнику O_1O_2A , проекции вектора переносной скорости $v_{перx} = -\Omega r$ и $v_{перy} = +\frac{12}{5} \Omega r$. Поэтому для $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_A - \vec{v}_{пер}$ получаем: $v_{отнx} = v_{отны} = +\frac{12}{5} \Omega r$. Значит, $v_{отн} = \frac{12\sqrt{2}}{5} \Omega r \approx 1,7 \text{ м/с}$.

ОТВЕТ: 1,7.