

**10-11 классы, подготовка к теоретическому туру
олимпиады школьников «Робофест» по физике**

Задачи к вводному занятию 4.

Тема: «Закон сохранения механической энергии».

Задача 1 (2 балла) [бросок под углом к горизонту, закон сохранения энергии]

Небольшой тяжелый шарик просили с ровного склона, наклоненного под углом 30° к горизонту со скоростью $v_0 = 15$ м/с таким образом, что он упал на расстоянии $l = 20$ м от точки броска, выше нее по склону (точка броска и точка падения лежат в одной вертикальной плоскости). Пренебрегая сопротивлением воздуха найдите, с какой скоростью шарик упал на склон. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с². Ответ приведите в м/с, с точностью до десятых.

Подсказка 1: На шарик действует только потенциальная сила – сила тяжести Земли, поэтому можно использовать закон сохранения полной механической энергии.

Подсказка 2: В момент броска механическая энергия равна $\frac{mv_0^2}{2}$, а в момент падения $\frac{mv^2}{2} + mgh$.

Подсказка 3: Высота, на которую поднимается шарик к моменту падения над начальной точкой $h = l \cdot \sin(30^\circ) = \frac{l}{2}$.

Решение:

На шарик действует только потенциальная сила – сила тяжести Земли. Поэтому можно использовать закон сохранения полной механической энергии: в момент броска механическая энергия равна $\frac{mv_0^2}{2}$, а в момент падения $\frac{mv^2}{2} + mgh$. Высота, на которую поднимается шарик к моменту падения над начальной точкой $h = l \cdot \sin(30^\circ) = \frac{l}{2}$. Поэтому $v = \sqrt{v_0^2 - gl} \approx 5,0$ м/с.

ОТВЕТ: 5,0.

Задача 2 (3 балла) [пружина, сила трения, закон изменения энергии]

Маленький груз массой $m = 0,4$ кг прикрепили к горизонтальной легкой пружине с жесткостью $k = 200$ Н/м, второй конец которой закреплен неподвижно. Пружину сжали (без изгибов) на расстояние $x_0 = 2,5$ см, и отпустили без начальной скорости. Какое расстояние пройдет груз до остановки? Коэффициент трения между грузом и поверхностью $\mu = 0,5$. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с². Ответ запишите в см, округлив до целого значения при необходимости.

Подсказка 1: В этом случае механическая энергия системы убывает из-за отрицательной работы силы трения.

Подсказка 2: Так как и в начальной точке, и в точке остановки кинетическая энергия груза равна нулю, то убыль потенциальной энергии деформированной пружины равна $A_{\text{тр}} = -\mu mgs$, где s – искомое расстояние.

Подсказка 3: Модуль деформации пружины в точке остановки равен $|s - x_0|$.

Решение:

В этом случае механическая энергия системы убывает из-за отрицательной работы силы трения. Так как и в начальной точке, и в точке остановки кинетическая энергия груза равна нулю, то из закона изменения полной механической энергии следует, что

$\frac{k(s_1 - x_0)^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} = -\mu mg s_1$, где s_1 – расстояние, пройденное до первой остановки. Из этого уравнения получаем, что $s_1 = 2\left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) = 3$ см. В конечной точке деформация пружины $s_1 - x_0 = 0,5$ см, то есть сила упругости $F_{\text{упр}} = k(s - x_0) = 1$ Н меньше максимальной величины силы трения покоя $F_{\text{мп}} = \mu mg = 2$ Н. Таким образом, груз после первой остановки уже не будет двигаться, и его путь до остановки равен $s_1 = 3$ см.

ОТВЕТ: 3.

Задача 3 (4 балла) [пружина, сила трения, закон изменения энергии]

Маленький груз массой $m = 0,4$ кг прикрепили к горизонтальной легкой пружине с жесткостью $k = 200$ Н/м, второй конец которой закреплен неподвижно. Пружину сжали (без изгибов) на расстояние $x_0 = 4$ см, и отпустили без начальной скорости. Какое расстояние пройдет груз до остановки? Коэффициент трения между грузом и поверхностью $\mu = 0,5$. Соппротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с². Ответ запишите в см, округлив до целого значения при необходимости.

Подсказка 1: Путь до первой остановки $s_1 = 2\left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) = 3$ см.

Подсказка 2: В конечной точке деформация пружины $x_1 = s_1 - x_0 = 2$ см, то есть сила упругости $F_{\text{упр}} = kx_1 = 4$ Н больше максимальной величины силы трения покоя $F_{\text{мп}} = \mu mg = 2$ Н.

Подсказка 3: После первой остановки груз не останется на месте, а начнет двигаться в обратную сторону и пройдет расстояние $s_2 = 2\left(x_1 - \frac{\mu mg}{k}\right) = 2$ см.

Решение:

В этом случае механическая энергия системы убывает из-за отрицательной работы силы трения. Так как и в начальной точке, и в точке остановки кинетическая энергия груза равна нулю, то из закона изменения полной механической энергии следует, что $\frac{k(s_1 - x_0)^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} = -\mu mg s_1$, где s_1 – расстояние, пройденное до первой остановки. Из этого

уравнения получаем, что $s_1 = 2\left(x_0 - \frac{\mu mg}{k}\right) = 6$ см. В конечной точке деформация пружины

$x_1 = s_1 - x_0 = 2$ см, то есть сила упругости $F_{\text{упр}} = kx_1 = 4$ Н больше максимальной величины силы трения покоя $F_{\text{мп}} = \mu mg = 2$ Н. Значит, после первой остановки груз не останется на месте, а начнет двигаться в обратную сторону. Повторяя рассуждения, проведенные для первого движения, найдем, что для второго движения перемещение определяется по формуле

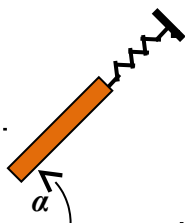
$s_2 = 2\left(x_1 - \frac{\mu mg}{k}\right) = 2$ см, а деформация пружины после второй остановки $x_2 = s_2 - x_1 = 2$.

Значит, теперь груз останется на месте, и его полный путь до остановки $s = s_1 + s_2 = 8$ см.

ОТВЕТ: 8.

Задача 4 (3 балла) [пружина, сила трения, сила тяжести, закон изменения энергии]

Доска массой $m = 1$ кг находится на ровной поверхности, наклоненной под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. К верхнему ее концу прикреплена легкая пружина с жесткостью $k = 100$ Н/м, а верхний пружины закреплен неподвижно (см. рисунок). Ось пружины идет вдоль плоскости и совпадает с осью доски. Сначала доску удерживают в положении, в котором пружина не деформирована, затем отпускают без начальной скорости. Какое расстояние пройдет доска до первой остановки, если коэффициент трения между доской и поверхностью $\mu = 0,5$? Ответ запишите в см, с точностью до десятых.



Подсказка 1: Кинетическая энергия доски равна нулю как в начальной точке, так и в точке остановки, а потенциальная энергия равна сумме потенциальной энергии доски в поле тяжести и энергии деформированной пружины.

Подсказка 2: Если доска пройдет путь \$S\$, то пружина растянется на такое же расстояние, а центр масс доски опустится на высоту \$h = s \cdot \sin(\alpha)\$.

Подсказка 3: Изменение потенциальной энергии равно \$A_{mp} = -|\vec{F}_{mp}|s = -\mu mg \cos(\alpha)s\$.

Решение:

И в этом случае механическая энергия системы убывает из-за отрицательной работы силы трения. Кинетическая энергия доски равна нулю как в начальной точке, так и в точке остановки. Потенциальная энергия равна сумме потенциальной энергии доски в поле тяжести и энергии деформированной пружины. Если доска пройдет путь \$S\$, то пружина растянется на такое же расстояние, а центр масс доски опустится на высоту \$h = s \cdot \sin(\alpha)\$. Величина силы трения скольжения \$F_{mp} = \mu N = \mu mg \cos(\alpha)\$. Поэтому из закона изменения полной механической энергии следует, что \$\frac{ks^2}{2} - mgs \sin(\alpha) = -\mu mgs \cos(\alpha)\$. Таким образом,

$$s = \frac{2mg}{k} [\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha)] \approx 7,1 \text{ см.}$$

ОТВЕТ: 7,1.

Задача 5 (4 балла) [круговые орбиты, диссипация, закон изменения энергии]

Спутник массы \$m = 50\$ кг движется по круговой орбите вокруг Земли. В некоторый момент времени радиус его орбиты в два раза превосходит Радиус Земли \$R_3 \approx 6400\$ км. На него действует малая сила сопротивления разреженной атмосферы, величина которой пропорциональна квадрату скорости спутника: \$|\vec{F}_c| = \beta \cdot v^2\$, где \$\beta = 4 \cdot 10^{-10}\$ Н·с\$^2\$/м\$^2\$. Сколько оборотов вокруг Земли совершит спутник после этого момента за время, за которое радиус его орбиты уменьшится на 1%? Ответ записать с точностью до десятых.

Подсказка 1: На круговой орбите центростремительное ускорение тела создается именно силой тяготения: \$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}\$.

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Подсказка 2: Значит, механическая энергия спутника \$E = E_K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{2R}\$.

Подсказка 3: Так как радиус изменяется всего на 1 %, то можно считать, что орбита и скорость спутника также практически не изменяются. Поэтому работа силы сопротивления среды за \$N\$ оборотов \$A_c = -|\vec{F}_c| \cdot 2\pi R \cdot N\$ соответствует убыли механической энергии.

Решение:

Заметим, что на круговой орбите центростремительное ускорение тела создается именно силой тяготения: \$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}\$. С помощью этого выражения найдем, что полная

механическая энергия спутника \$E = E_K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{2R}\$. Так как радиус изменяется всего на 1 %, то можно считать, что орбита и скорость спутника также практически не изменяются. Поэтому работа силы сопротивления среды за \$N\$ оборотов

$A_c = -|\vec{F}_c| \cdot 2\pi R \cdot N$, и после выражения величины силы и радиуса орбиты через скорость получаем: $A_c = -\beta \cdot v^2 2\pi \frac{GM}{v^2} \cdot N = -\beta \cdot 2\pi GM \cdot N$. Уменьшение механической энергии связано именно с этой работой ($-\frac{GmM}{4 \cdot 0,99 R_3} + \frac{GmM}{4 R_3} = A_c$), и поэтому $\frac{1}{99} \frac{GmM}{4 R_3} = \beta \cdot 2\pi GM \cdot N$. Выразим число оборотов: $N \approx \frac{m}{\beta \cdot 792\pi R_3} \approx 78,5$.

ОТВЕТ: 78,5.

Задача 6 (5 баллов) [центростремительное ускорение, закон сохранения энергии, отрыв]

На один из концов жесткого невесомого тонкого стержня длиной $l = 90$ см прикрепили маленький массивный шарик. Другой конец стержня закрепили шарнирно на горизонтальной оси, так что стержень может без трения вращаться в вертикальной плоскости. Стержень привели в вертикальное положение (шарик при этом оказался сверху), а затем подтолкнули таким образом, что в начале начавшегося движения стержень оказался в практически недеформированном состоянии. Известно, что для отрыва шарика от стержня необходимо усилие, в $n = 4,5$ раза превышающее вес шарика. Какую скорость будет иметь шарик в момент отрыва от стержня? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с². Ответ выразить в м/с, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: В процессе вращения стержня с шариком сила упругости растянутого стержня F вместе с радиальной компонентой силы тяжести создает центростремительное ускорение шарика: $m \frac{v^2}{l} = F + mg \cos \varphi$, где φ – угол отклонения стержня от начального вертикального положения.

Подсказка 2: Потенциальная энергия шарика в поле тяжести переходит в его кинетическую энергию: $\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl \cos \varphi$.

Подсказка 3: Начальную скорость можно найти из условия, что сразу после начала движения стержень оказался в практически недеформированном состоянии, а угол $\varphi_{\text{отр}}$, при котором происходит отрыв шарика – из условия $F = \frac{9}{2} mg$.

Решение:

Обозначим F величину силы, действующей на стержень со стороны шарика (ясно, что такая же по величине сила действует на шарик). Пусть φ – угол отклонения стержня от начального вертикального положения. Тогда уравнение движения шарика для центростремительной компоненты ускорения (учтем, что стержень при $\varphi = 0$ находится в недеформированном состоянии, и поэтому при $\varphi > 0$ он растянут):

$$m \frac{v^2}{l} = F + mg \cos \varphi.$$

Добавим к этому уравнению соотношение, следующее из закона сохранения энергии: поскольку потенциальная энергия шарика в поле тяжести (за нулевой уровень принят уровень оси) $U(\varphi) = mgl \cos \varphi$, то

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv^2}{2} + mgl \cos \varphi \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gl(1 - \cos \varphi).$$

Из этих соотношений находим зависимость:

$$F(\varphi) = m \frac{v^2}{l} - mg \cos \varphi = m \frac{v_0^2}{l} + mg(2 - 3 \cos \varphi).$$

Из условия известно, что $F(0) = 0$. Это позволяет определить начальную скорость: $v_0 = \sqrt{gl}$ и, следовательно, $F(\varphi) = 3mg(1 - \cos \varphi)$. Отрыв шарика от стержня происходит при

$F(\varphi) = F_{\text{omp}} = \frac{9}{2}mg \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$. В этот момент времени скорость шарика $v^2 = gl + 2gl(1 - \cos \varphi) = 4gl \Rightarrow v = 2\sqrt{gl} \approx 6 \text{ м/с}$.

ОТВЕТ: 6.

Задача 7 (5 баллов) [неравномерное вращение, ускорение]

В некоторых плотинах для спуска воды используют водосбросы, которые называют «трамплинными». В них вода, проходя по изогнутому каналу-трамплину, выбрасывается под углом к горизонту и падает на значительном расстоянии от плотины (см. фотографию). Конечно, при таком «прыжке» водяной поток дробится с образованием множества капель, но в данной задаче мы примем, что в изучаемом водосбросе большая часть воды идет «сплошным потоком». На выходе с «трамплина» вода движется со скоростью $V_0 = 20 \text{ м/с}$, и расход воды (то есть объем, выбрасываемый в единицу времени) равен $q = 240 \text{ м}^3/\text{с}$. Пусть нам также известно, что время полета выделенной порции воды в потоке от выхода с трамплина до падения $t \approx 5,2 \text{ с}$, и направление движения потока в точке падения перпендикулярно направлению выброса с «трамплина».



Исследуйте движение «водяных струй» по следующей схеме:

- Найдите сечение водяного потока на выходе с «трамплина».
- Определите скорость потока в точке падения.
- Найдите минимально возможное сечение водяного потока в точке падения.
- Найдите угол вылета воды с трамплина по отношению к горизонту в градусах с точностью до целого значения.

В итоге вычислите разность высот точки вылета и точки падения в м с точностью до целого значения. Считайте, что в рамках требуемой точности влиянием сил сопротивления на движение воды можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Подсказка 1: За интервал времени Δt через сечение потока S при скорости V проходит объем жидкости, равный $S \cdot V \Delta t$, поэтому расход жидкости $q = S \cdot V$.

Подсказка 2: Если пренебрегать силами сопротивления, то можно считать, что «выделенная порция» воды движется с ускорением свободного падения. Тогда для векторов начальной и конечной скорости справедливо соотношение $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$. Если построить соответствующий векторный треугольник, то можно заметить: по условию он прямоугольный.

Подсказка 3: горизонтальная составляющая скорости потока во время полета постоянна.

Решение:

За интервал времени Δt через сечение потока S при скорости V проходит объем жидкости, равный $S \cdot V \Delta t$, поэтому расход жидкости $q = S \cdot V$. Следовательно, $S_0 = \frac{q}{V_0} = 12 \text{ м}^2$.

Если пренебрегать силами сопротивления, то можно считать, что «выделенная порция» воды движется с ускорением свободного падения. Тогда для векторов начальной и конечной скорости справедливо соотношение $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$. Если построить соответствующий векторный треугольник (см. рисунок), то можно заметить: по условию он прямоугольный, и, в соответствии с теоремой Пифагора:

$$V^2 + V_0^2 = g^2 t^2 \Rightarrow V = \sqrt{g^2 t^2 - V_0^2} \approx 48 \text{ м/с}.$$

Таким образом, минимально возможное сечение потока в точке падения

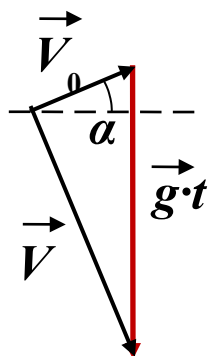
$$S_{\min} = \frac{q}{V} = \frac{q}{\sqrt{g^2 t^2 - V_0^2}} \approx 5 \text{ м}^2. \quad \text{Ясно, что реальная площадь сечения будет больше из-за}$$

дробления потока. Так как горизонтальная составляющая скорости потока во время полета

$$\text{постоянна, то } V \sin(\alpha) = V_0 \cos(\alpha) \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{V_0}{V} = \frac{5}{12}. \quad \text{Значит, } \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 23^\circ. \quad \text{При этом}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}} = \frac{5}{13}. \quad \text{Изменение высоты за время полета}$$

$$\Delta h = \left| V_0 \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2} \right| = \left| \frac{5}{13} V_0 t - \frac{gt^2}{2} \right|, \text{ то есть } \Delta h = \frac{gt^2}{2} - \frac{5}{13} V_0 t \approx 95 \text{ м}.$$



ОТВЕТ: 95.