

10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

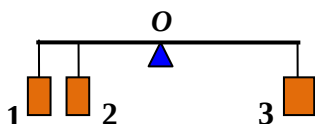
олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задачи к вводному занятию 3.

Тема: «Взаимодействия: силы, моменты сил и равновесие».

Задача 1 (1 балл) [момент силы, рычаг, равновесие]

К горизонтальному рычагу подвешены три груза: первый – на расстоянии 70 см от точки опоры, второй – на расстоянии 50 см от нее, а третий – на расстоянии 80 см, по другую сторону от первых двух. Массы первого и второго грузов одинаковы и равны 800 г, масса рычага намного меньше массы любого из грузов. Найти массу третьего груза, при которой рычаг находится в равновесии. Ответ приведите в килограммах, с точностью до десятых.



Подсказка 1: Силы, действующие со стороны грузов на рычаг, равны их весам.

Подсказка 2: Грузы 1 и 2 пытаются повернуть рычаг в «положительном» направлении, а груз 3 – в «отрицательном».

Подсказка 3: Условие равенства нулю суммы моментов сил здесь имеет вид $mg \cdot L_1 + mg \cdot L_2 = m_3 g \cdot L_3$.

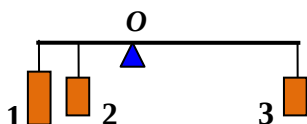
Решение: Силы, действующие со стороны грузов на рычаг, равны их весам. Грузы 1 и 2 пытаются повернуть рычаг в «положительном» направлении, а груз 3 – в «отрицательном». Поэтому условие равенства нулю суммы моментов сил здесь имеет вид $mg \cdot L_1 + mg \cdot L_2 = m_3 g \cdot L_3$, где m – одинаковая масса грузов 1 и 2. Следовательно,

$$m_3 = \frac{L_1 + L_2}{L_3} m = 1,2 \text{ кг.}$$

ОТВЕТ: 1,2.

Задача 2 (3 балла) [момент силы, рычаг, равновесие]

К горизонтальному рычагу, находящемуся в равновесии, подвешены три груза. Точка опоры делит рычаг таким образом, что расстояние от нее до третьего груза в два раза больше, чем до первого, а второй подвешен где-то между первым и точкой опоры (см. рисунок). Массы второго и третьего грузов одинаковы и равны 1 кг, масса рычага намного меньше массы любого из грузов. Если перевесить третий груз на место первого, то для сохранения равновесия первый нужно будет прикрепить к точке, находящейся в точности симметрично точке его первоначального прикрепления относительно О. Найдите массу первого груза. Ответ приведите в килограммах, с точностью до десятых.



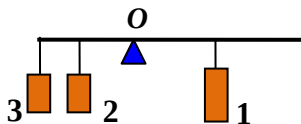
Подсказка 1: Условие равновесия рычага в первом случае выглядит следующим образом: $m_1 g \cdot L + mg \cdot L_2 = mg \cdot 2L$.

Подсказка 2: условие равновесия рычага во втором случае выглядит следующим образом: $m_1 g \cdot L = mg \cdot L_2 + mg \cdot L$.

Подсказка 3: Исключив из этих уравнений L_2 , получим ответ.

Решение:

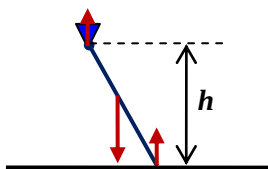
Пусть m – одинаковая масса грузов 2 и 3, а L – расстояние от точки опоры до точки подвеса груза 1 в первом случае. Расстояния до точек подвеса грузов 2 и 3 равны L_2 и $L_3 = 2L$. Тогда условие равновесия рычага в первом случае выглядит следующим образом: $m_1 g \cdot L + mg \cdot L_2 = mg \cdot 2L$, то есть $m_1 = m \cdot \left(2 - \frac{L_2}{L}\right)$. Изобразим положение грузов во втором случае:



Теперь условие равновесия рычага – это $m_1 g \cdot L = mg \cdot L_2 + mg \cdot L$, или $m_1 = m \cdot \left(1 + \frac{L_2}{L}\right)$.

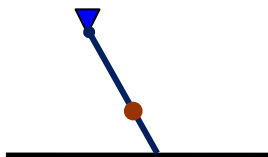
Складывая почленно два полученных равенства для m_1 , избавляемся от неизвестной величины L_2 , и находим, что $m_1 = \frac{3}{2}m = 1,5 \text{ кг}$.

ОТВЕТ: 1,5.



Задача 3 (3 балла) [момент силы, рычаг, равновесие]

Однородный стержень с массой $m = 4 \text{ кг}$ подвешен на шарнире, благодаря которому может свободно вращаться в вертикальной плоскости. На расстоянии трети длины стержня от нижнего конца к нему прикреплен малый по размерам груз с массой $M = 9 \text{ кг}$. Нижним концом стержень опирается на горизонтальный пол (трение между ними пренебрежимо мало). С какой силой давит стержень на пол? Ответ запишите в ньютонах, при необходимости округлив до целого значения. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.



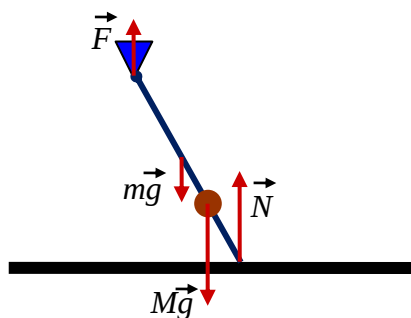
Подсказка 1: Вместо того, чтобы искать силу, действующую со стороны стержня на пол, можно искать равную ей по величине и противоположную по направлению силу реакции пола, действующую на стержень.

Подсказка 2: Здесь достаточно записать уравнение моментов относительно точки подвеса (плечо силы реакции подвеса равно нулю и поэтому эта сила не войдет в уравнение – ее момент тоже равен нулю).

Подсказка 3: Если d – длина проекции стержня на горизонталь, то плечо силы тяжести стержня равно $\frac{d}{2}$, плечо веса груза равно $\frac{2d}{3}$, а плечо силы реакции пола равно d .

Решение:

Изобразим силы, действующие на стержень: сила тяжести $m\vec{g}$, вес груза $M\vec{g}$, силу реакции шарнира $\vec{F}$ и силу реакции пола $\vec{N}$. Искомая сила, согласно III закону Ньютона, равна $\vec{P} = -\vec{N}$, и ее величина совпадает с $N \equiv |\vec{N}|$.



Здесь нужно записать уравнение моментов относительно точки подвеса (плечо силы реакции подвеса равно нулю и поэтому эта сила не войдет в уравнение – ее момент тоже равен нулю). Для этого обозначим длину проекции стержня на горизонталь d . Тогда, как ясно из геометрии, плечо силы $m\vec{g}$ равно $\frac{d}{2}$, плечо силы $M\vec{g}$ равно $\frac{2d}{3}$, а плечо силы $\vec{N}$ равно d .

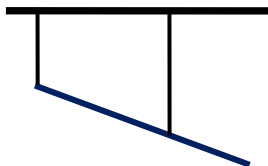
Итак, уравнение моментов $+N \cdot d - mg \frac{d}{2} - Mg \frac{2d}{3} = 0 \Rightarrow N = \frac{3m + 4M}{6} g \approx 80 \text{ Н}$.

ОТВЕТ: 80.

Задача 4 (2 балла) [момент силы, рычаг, равновесие]

Однородный стержень длиной 80 см подвешен на двух невесомых нерастяжимых нитях разной длины таким образом, что обе нити в положении равновесия оказались вертикальны. При этом одна из них прикреплена к самому концу стержня, а вторая – на расстоянии 30 см от другого конца (см. рисунок). Во сколько раз отличаются силы натяжения нитей? В ответе

укажите отношение $\frac{T_2}{T_1}$, округлив при необходимости до целого значения.



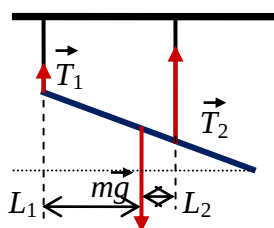
Подсказка 1: На стержень действуют сила тяжести и силы натяжения нитей, и все они вертикальны.

Подсказка 2: Здесь удобно записать уравнение моментов относительно центра масс стержня.

Подсказка 3: Из геометрии ясно, что соотношение плеч сил натяжения относительно центра масс

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{80\text{см} - 40\text{см}}{40\text{см} - 30\text{см}} = 4.$$

Решение:



Начинаем с изображения сил, действующих на стержень: силы тяжести и сил натяжения нитей. Так как нам нужно только отношение сил натяжения, выгодно записать условие равновесия моментов относительно центра масс стержня (находящегося точно посередине):

$$+T_2 \cdot L_2 - T_1 \cdot L_1 = 0 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{L_1}{L_2}. \text{ Из геометрии понятно, что } \frac{L_1}{L_2} = \frac{80\text{см}-40\text{см}}{40\text{см}-30\text{см}} = 4. \text{ Итак, } \frac{T_2}{T_1} = 4.$$

Примечание: полезно посмотреть, что получится, если условие равновесия моментов записать относительно другой оси – например, относительно левого конца стержня. Тогда плечо силы тяжести $\frac{L'_g}{L'_2} = \frac{4}{5}$, и из $+T_2 \cdot L'_2 - mg \cdot L'_g = 0$ следует, что $T_2 = \frac{4}{5}mg$. Поскольку из условия

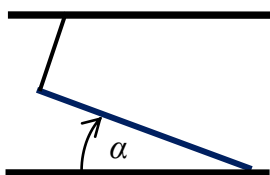
равновесия сил следует, что $T_1 + T_2 = mg$, то $T_1 = \frac{1}{5}mg$. Следовательно, $\frac{T_2}{T_1} = 4$. Как видно,

результат от перехода к другой оси действительно не изменился – изменился путь его достижения, так как теперь в соотношения вошла сила тяжести, и нам пришлось использовать полную систему двух уравнений вместо одного уравнения моментов.

ОТВЕТ: 4.

Задача 5 (4 балла) [сила, момент силы, рычаг, равновесие, сила трения]

Однородный стержень одним концом опирается на шероховатый пол, а за другой подвешен на невесомый нерастяжимой нити. В положении равновесия оказалось, что нить перпендикулярна стержню, а стержень наклонен под углом $\alpha = 15^\circ$ к полу (см.рисунок). При какой минимальной величине коэффициента трения стержня о пол такое равновесие возможно? Ответ запишите с точностью до сотых.



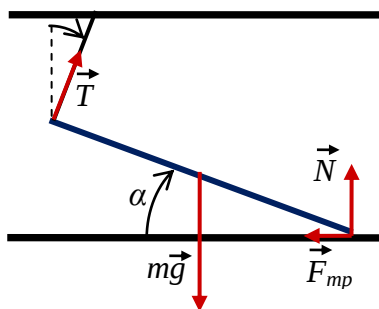
Подсказка 1: Стержень покоится под действием силы тяжести, силы натяжения нити, силы нормальной реакции пола и силы трения.

Подсказка 2: Удобно использовать уравнение моментов относительно точки, в которой стержень касается пола.

Подсказка 3: Для нахождения сил трения и силы нормальной реакции необходимо также использовать условие равновесия сил.

Решение:

Стержень покоится под действием силы тяжести, силы натяжения нити, силы нормальной реакции пола и силы трения, направления и точки приложения которых показаны на рисунке:



Запишем уравнение моментов относительно точки, в которой стержень касается пола. Здесь у двух сил ($\vec{N}$ и $\vec{F}_{mp}$) плечи равны нулю, и поэтому $mg \cdot \frac{L}{2} \cos(\alpha) - T \cdot L = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2} \cos(\alpha)$ (где L – длина стержня). Сила трения уравновешивает горизонтальную составляющую силы

натяжения: $F_{mp} = T \sin(\alpha) = \frac{mg}{4} \sin(2\alpha)$. Сила нормальной реакции пола $N = mg - T \cos(\alpha) = \frac{3 - \cos(2\alpha)}{4} mg$. Для силы трения покоя должно выполняться требование $F_{mp} \leq \mu N$, поэтому $\sin(2\alpha) \leq \mu [3 - \cos(2\alpha)] \Rightarrow \mu \geq \frac{\sin(2\alpha)}{3 - \cos(2\alpha)} = \frac{1}{6 - \sqrt{3}} \approx 0,23$. Итак, минимальный требуемый коэффициент трения $\mu_{\min} = \frac{1}{6 - \sqrt{3}} \approx 0,23$.

ОТВЕТ: 0,23.

Задача 6 (3 балла) [сила, момент силы, равновесие, сила Архимеда]

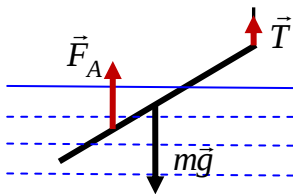
Однородная доска подвешена на легкой упругой нити за правый конец над поверхностью воды. В состоянии равновесия доска погружена в воду на две трети своей длины, а сила натяжения нити $T = 2,3 \text{ Н}$. Определите массу доски. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$. Ответ приведите в граммах, с точностью до целого значения.

Подсказка 1: Доска покоится под действием силы тяжести $m\vec{g}$, силы Архимеда $\vec{F}_A$ и силы натяжения нити $\vec{T}$.

Подсказка 2: Поскольку сила тяжести и сила Архимеда направлены вертикально, то и сила $\vec{T}$ направлена вертикально (вверх), причем $m\vec{g} = \vec{T} + \vec{F}_A$.

Подсказка 3: Сила тяжести приложена к середине доски, а сила Архимеда – к середине погруженной части, то есть к точке, находящейся на расстоянии двух третей длины доски от точки подвеса.

Решение:



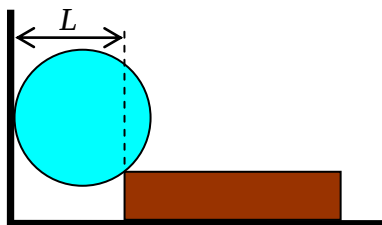
Изобразим на рисунке силы, действующие на доску: силу тяжести $m\vec{g}$, силу Архимеда $\vec{F}_A$ и силу натяжения нити $\vec{T}$. Поскольку сила тяжести и сила Архимеда направлены вертикально, то и сила $\vec{T}$ направлена вертикально (вверх), причем $m\vec{g} = \vec{T} + \vec{F}_A$. Сила тяжести приложена к середине доски, а сила Архимеда – к середине погруженной части, то есть к точке, находящейся на расстоянии двух третей длины доски от точки подвеса. Правило моментов относительно этой точки дает, что $F_A \cdot \frac{2}{3}L - mg \cdot \frac{1}{2}L = 0 \Rightarrow F_A = \frac{3}{4}mg$. С учетом

этого $m\vec{g} = 4T \Rightarrow m = \frac{4T}{g} \approx 920 \text{ г}$.

ОТВЕТ: 920.

Задача 7 (5 баллов) [сила, момент силы, равновесие, сила трения]

Гладкий шар массой $m = 0,5 \text{ кг}$ радиусом $R = 5 \text{ см}$ положили так, что он опирается на вертикальную стенку и длинный брусок массой $M = 2 \text{ кг}$ (см. рисунок). Брусок находится на расстоянии $L = 8 \text{ см}$ от стенки и лежит на горизонтальной шероховатой поверхности. При какой минимальной величине коэффициента трения между бруском и поверхностью такое равновесие возможно? Ответ запишите с точностью до сотых.

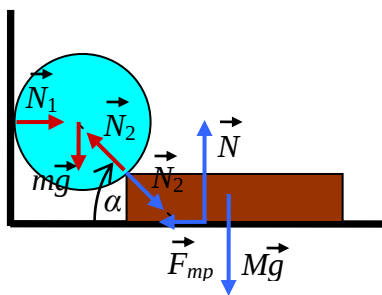


Подсказка 1: Шар покоится под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и сил нормальной реакции стены $\vec{N}_1$ и бруска $\vec{N}_2$, а брусок – под действием «парной» силы реакции шара, силы тяжести $M\vec{g}$, силы реакции пола $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{mp}$.

Подсказка 2: Если α – угол наклона линии действия $\vec{N}_2$ к горизонту, то из геометрии ясно, что $L = R[1 + \cos(\alpha)] \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{L}{R} - 1 = \frac{3}{5}$.

Подсказка 3: Нужно рассмотреть условия равновесия сил для шара – в проекции на вертикальную ось и для бруска – в проекции на вертикальную и горизонтальную оси.

Решение:



На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и силы нормальной реакции стены и бруска ($\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – см. рисунок). Сила тяжести приложена к центру шара, а линии действия сил нормальной реакции проходят по радиусам. Таким образом, линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке (в центре шара), и, если мы запишем правило моментов для шара относительно этой точки, то оно окажется тождеством ($0=0$), справедливым независимо от величины этих сил! Можно сделать вывод, что всегда, когда тело покоится под действием трех непараллельных сил, линии их действия должны пересекаться в одной точке (иначе условие равновесия моментов относительно точки пересечения двух из них не будет выполнено). Обозначим угол наклона линии действия $\vec{N}_2$ к горизонту α . Тогда условие равновесия сил

для шара в проекции на вертикальную ось дает: $N_2 \sin(\alpha) = mg \Rightarrow N_2 = \frac{mg}{\sin(\alpha)}$. Величина угла

находится из геометрии: поскольку $L = R[1 + \cos(\alpha)]$, то $\cos(\alpha) = \frac{L}{R} - 1 = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{4}{5}$.

Следовательно, $N_2 = \frac{5}{4}mg$. Теперь рассмотрим равновесие бруска под действием силы $\vec{N}_2$,

силы тяжести $M\vec{g}$, силы реакции пола $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{mp}$. Из условия равновесия сил в проекции на горизонтальную ось находим необходимую величину силы трения покоя:

$F_{mp} = N_2 \cos(\alpha) = \frac{3}{4} \frac{5}{4}mg = \frac{3}{4}mg$. Из условия равновесия сил в проекции на вертикальную ось

получаем, что $N = mg + N_2 \sin(\alpha) = (M + m)g$. Для силы трения покоя должно выполняться

требование $F_{mp} \leq \mu N$, поэтому $\frac{3}{4}mg \leq \mu[M + m]g \Rightarrow \mu \geq \frac{3m}{4(M + m)} = 0,15$. Значит, $\mu_{\min} = 0,15$.

ОТВЕТ: 0,15.