10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задачи к вводному занятию 2.

Тема: «Вращение и криволинейное движение».

Задача 1 (2 балла) [угловая скорость, центростремительное ускорение]
Материальная точка движется по окружности, совершая полный оборот за время $T = 3{,}14$ с. При этом величина ее мгновенного ускорения постоянна и равна $a = 6$ м/с^2. Найдите радиус окружности. Ответ приведите в метрах, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Так как модуль ускорения постоянен, то вращение равномерное.

Подсказка 2: Величина угловой скорости $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Подсказка 3: Величина ускорения $a = \omega^2 R$.

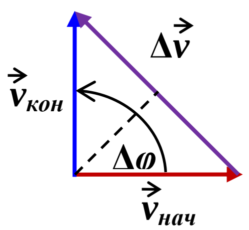
Решение: Так как модуль ускорения постоянен, то вращение равномерное. Величина угловой скорости $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Поэтому величина ускорения $a = \omega^2 R = \dfrac{4\pi^2}{T^2} R$. Таким образом, $R = \dfrac{aT^2}{4\pi^2} \approx 1{,}5$ м.

ОТВЕТ: 1.5.

Задача 2 (3 балла) [угловая скорость, сложение векторов]
Материальная точка движется равномерно по окружности. При этом оказывается, что $\Delta t = 1{,}57$ с – это минимальная длительность интервала, за который скорость точки $\vec{v}$ изменяется на вектор $\Delta\vec{v}$, модуль которого в $\sqrt{2}$ раз больше, чем модуль самой скорости. Определите величину угловой скорости точки. Ответ запишите в рад/с, округлив до десятых.

Подсказка 1: Для минимальности времени переправы катер должен двигаться по прямой, развивая свою максимальную скорость.
Подсказка 2: Нужно построить векторный треугольник, определяющий скорость катера относительно берега $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$ так, чтобы $\vec{v}'$ была ориентирована вдоль нужного курса.
Подсказка 3: Удобно записать это равенство в проекциях на направления перпендикулярно курсу катера и вдоль него.

Решение:



При повороте неизменного по величине вектора скорости равномерного вращения на угол $\Delta\varphi$ величина изменения скорости $|\Delta\vec{v}| = 2|\vec{v}|\sin(\Delta\varphi/2)$. Поэтому отношению $\dfrac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \sqrt{2}$ соответствует $\sin(\Delta\varphi/2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Минимальный угол поворота, при котором выполняется это требование $\Delta\varphi = 90° = \dfrac{\pi}{2}$ рад. Значит, угловая скорость $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} \approx 1{,}0$ рад/с.

ОТВЕТ: 1,0.

Задача 3 (3 балла) [вращение, скорость, центростремительное ускорение]
Небольшой груз вращается по окружности радиуса 4 м. Модуль его ускорения остается постоянным и равным 6,25 м/с^2, при этом ускорение всегда направлено к центру окружности. Найти путь, который проходит груз за 2 с. Ответ запишите в метрах, округлив до целого значения.

Подсказка 1: У груза есть только центростремительное ускорение, поэтому груз вращается равномерно.

Подсказка 2: При равномерном вращении $a = \frac{v^2}{R}$.

Подсказка 3: Величина скорости груза $v = \sqrt{aR}$.

Решение:

Ускорение направлено к центру окружности, то есть у груза есть только центростремительное ускорение. Следовательно, груз вращается равномерно. При равномерном вращении $a = \frac{v^2}{R}$, поэтому величина скорости груза $v = \sqrt{aR} = 5$ м/с. Путь груза $s = vt = t\sqrt{aR} = 10$ м.

ОТВЕТ: 10.

Задача 4 (3 балла) [равномерное вращение, ускорение]
Небольшое тело вращается равномерно по окружности с периодом $T = 6$ с. Во сколько раз величина среднего ускорения за время $t = 2$ с меньше модуля мгновенного ускорения? Ответ запишите в виде правильной десятичной дроби, с точностью до десятых.

Подсказка 1: Модуль мгновенного ускорения тела $a = \frac{v^2}{R}$ с учетом того, что период обращения $T = \frac{2\pi R}{v}$, можно выразить через величину скорости и период обращения: $a = \frac{2\pi v}{T}$.

Подсказка 2: Модуль среднего ускорения $|\vec{a}_{cp}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{t}$ с учетом того, что $|\Delta\vec{v}| = 2v\sin(\Delta\varphi/2)$,(где $\Delta\varphi$ – угол поворота вектора скорости за время t) можно записать как $|\vec{a}_{cp}| = \frac{2v\sin(\Delta\varphi/2)}{t}$.

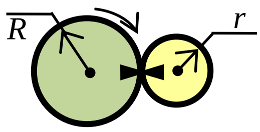
Подсказка 3: Так как $t = \frac{T}{3}$, то за это время тело пройдет треть окружности, и $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$ рад.

Решение:

Модуль мгновенного ускорения тела $a = \frac{v^2}{R}$ с учетом того, что период обращения $T = \frac{2\pi R}{v}$, можно выразить через величину скорости и период обращения: $a = \frac{2\pi v}{T}$. Модуль среднего ускорения $|\vec{a}_{cp}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{t}$ с учетом того, что $|\Delta\vec{v}| = 2v\sin(\Delta\varphi/2)$,(где $\Delta\varphi$ – угол поворота вектора скорости за время t) можно записать как $|\vec{a}_{cp}| = \frac{2v\sin(\Delta\varphi/2)}{t}$. Так как $t = \frac{T}{3}$, то за это время тело пройдет треть окружности, и $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ рад. Значит, $|\vec{a}_{cp}| = \sqrt{3}\dfrac{v}{t}$. Следовательно, $\dfrac{a}{|\vec{a}_{cp}|} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\dfrac{t}{T} \approx 1{,}2$.

ОТВЕТ: 1,2.

Задача 5 (3 балла) [равномерное вращение, скорость, отсутствие проскальзывания]
В некотором механизме ведущая шестеренка радиуса R вращается с угловой скоростью $\Omega = 2$ рад/с. Эта шестеренка приводит в движение шестеренку меньшего радиуса, равного $r = \dfrac{R}{n}$, где $n = 1{,}5$. Шестеренки вращаются без проскальзывания. Оси обеих шестеренок покоятся относительно корпуса механизма. На ободе каждой шестеренки поставлена метка. В момент времени $t = 0$ эти метки соприкоснулись. В какой момент времени эти метки в первый раз будут двигаться во взаимно-перпендикулярных направлениях в системе отсчета, связанной с корпусом механизма? Ответ записать в миллисекундах, с точностью до целого значения.



Подсказка 1: Из геометрии ясно, что угол между векторами скорости меток равен сумме их углов поворота от того положения, в котором они были сонаправлены.
Подсказка 2: Условие отсутствия проскальзывания дает $\Omega R = \omega r$.
Подсказка 3: Угол поворота метки на большой шестеренке $\Phi(t) = \Omega t$.

Решение:

Из геометрии ясно, что угол между векторами скорости меток равен сумме их углов поворота от того положения, в котором они были сонаправлены. Угол поворота метки на большой шестеренке $\Phi(t) = \Omega t$. Условие отсутствия проскальзывания дает $\Omega R = \omega r$, и поэтому угловая скорость вращения малой шестеренки $\omega = \dfrac{R}{r}\Omega$. Поэтому угол поворота метки на малой шестеренке $\varphi(t) = \dfrac{R}{r}\Omega t$, и условие перпендикулярности скоростей при минимальном угле поворота – это $\dfrac{\pi}{2} = \Phi(t) + \varphi(t) = \left(\dfrac{R}{r} + 1\right)\Omega t \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2(n+1)\Omega} \approx 0{,}314$с.

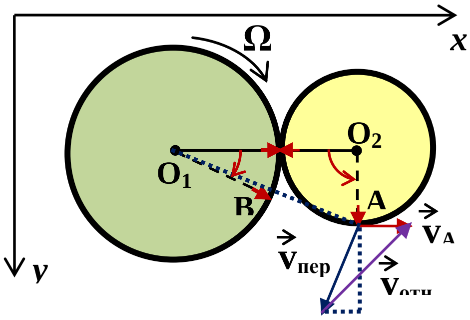
ОТВЕТ: 314.

Задача 6 (5 баллов) [вращение, переносная скорость, относительная скорость]
В некотором механизме ведущая шестеренка радиуса R вращается с угловой скоростью Ω. Эта шестеренка приводит в движение шестеренку меньшего радиуса, равного r. Шестеренки вращаются без проскальзывания. Оси обеих шестеренок покоятся относительно корпуса механизма. На ободе каждой шестеренки поставлена метка. В момент времени $t = 0$ эти метки соприкоснулись. Определите скорость метки на малой шестеренке относительно метки на большой шестеренке к моменту времени, соответствующему четверти периода вращения малой шестеренки, если $\Omega = 5$ рад/с, $R = 14$см, $r = 10$см. Ответ запишите в м/с, при необходимости округлив до десятых.

Подсказка 1:
Подсказка 2: .
Подсказка 3: .

Решение:

Скорость метки А на малой шестеренке относительно метки В на большой равна векторной разности скорости А и переносной скорости: $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_A - \vec{v}_{пер}$. За четверть периода вращения малой шестеренке А повернется на 90°, и ее новое положение показано на рисунке.



Скорость метки А $\vec{v}_A$ направлена перпендикулярно радиусу O_2A (вдоль введенной на рисунке оси x) и равна по величине $v_A = \omega r = \frac{R}{r}\Omega r = \frac{7}{5}\Omega r$. Расстояние от оси вращения большой шестеренки до А в этот момент времени $|O_1A| = \sqrt{(R+r)^2 + r^2} = \frac{13}{5}r = 26$см. Значит, переносная скорость для А направлена перпендикулярно O_1A и равна по величине $v_{пер} = \Omega \cdot |O_1A| = \frac{13}{5}\Omega r$. С учетом того, что треугольник, образованный вектором $\vec{v}_{пер}$ и его проекциями на оси x и y, подобен треугольнику O_1O_2A, проекции вектора переносной скорости $v_{перx} = -\Omega r$ и $v_{перy} = +\frac{12}{5}\Omega r$. Поэтому для $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_A - \vec{v}_{пер}$ получаем: $v_{отнx} = v_{отнy} = +\frac{12}{5}\Omega r$. Значит, $v_{отн} = \frac{12\sqrt{2}}{5}\Omega r \approx 1{,}7$ м/с.

ОТВЕТ: 1,7.

Задача 7 (4 балла) [неравномерное вращение, ускорение]

Материальная точка начинает движение с нулевой начальной скоростью и движется по окружности с постоянным положительным тангенциальным ускорением. К некоторому моменту времени она прошла путь, равный диаметру окружности. Во сколько раз увеличился модуль ее мгновенного ускорения к этому моменту времени (от начала движения)? Ответ запишите с точностью до десятых.

Подсказка 1: Пусть a – величина тангенциального (касательного) ускорения точки. Тогда величина скорости точки растет с течением времени по закону $v(t) = at$, а путь, пройденный ею – по закону $s(t) = \frac{at^2}{2}$.

Подсказка 2: Центростремительное ускорение точки $a_{цс}(t) = \frac{v^2}{R} = 2a\frac{s(t)}{R}$.

Подсказка 3: Полное ускорение равно сумме касательного и центростремительного, которые взаимно перпендикулярны.

Решение:

Пусть a – величина тангенциального (касательного) ускорения точки. Тогда величина скорости точки растет с течением времени по закону $v(t) = at$, а путь, пройденный ею – по закону $s(t) = \frac{at^2}{2}$. Исключая время, находим, что $v^2(t) = 2as(t)$. Центростремительное ускорение $a_{цс}(t)=\frac{v^2}{R}=2a\frac{s(t)}{R}$. Полное ускорение равно сумме касательного и центростремительного, которые взаимно перпендикулярны. Поэтому модуль ускорения $|\vec{a}|(t)=\sqrt{a^2+a_{цс}^2}=a\sqrt{1+4\frac{s^2(t)}{R^2}}$. При $s=0$ это выражение дает $|\vec{a}|(0)=a$, а при $s=2R$ – $|\vec{a}|(t)=a\sqrt{17}$. Поэтому $\frac{|\vec{a}|(t)}{|\vec{a}|(0)}=\sqrt{17}\approx 4{,}1$.

ОТВЕТ: 4,1.