

10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Задачи к вводному занятию 1.

Тема: «Метод координат и векторные величины в механике».

Задача 1 (3 балла) [скорость, сложение векторов]

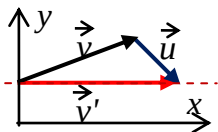
Вертолет в безветренную погоду пролетает расстояние между двумя городами по прямой за время, равное 3 часа. За какое время он пролетит это расстояние, двигаясь по той же прямой, при боковом «попутном» ветре, дующем под углом 45° к его курсу)? Скорость ветра в три раза меньше скорости вертолета. Ответ приведите в минутах, округлив до целого значения.

Подсказка 1: Скорость вертолета относительно Земли определяется из векторного равенства $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$, где $\vec{u}$ – скорость ветра, $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ – скорости вертолета относительно воздуха и Земли.

Подсказка 2: Удобно записать это равенство в проекциях на оси X (вдоль курса вертолета) и y (перпендикулярно ему).

Подсказка 3: Проекция этого равенства на ось y : $v \sin(\beta) - u \sin(\alpha) = 0$ (где $\alpha = 45^\circ$ – угол между скоростью ветра и курсом вертолета, а β – угол между скоростью вертолета относительно воздуха и его курсом), откуда $\sin(\beta) = \frac{u}{v} \sin(\alpha) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Решение: Скорость вертолета относительно Земли определяется из векторного равенства $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$. Выполним соответствующее построение (см. рисунок) и выберем систему координат (x и y).



Обозначим $\alpha = 45^\circ$ – угол между скоростью ветра $\vec{u}$ и курсом вертолета, а β – угол «упреждения» (между скоростью вертолета $\vec{v}$ относительно воздуха и его скоростью $\vec{v}'$ относительно Земли). Тогда проекция этого равенства на ось y : $v \sin(\beta) - u \sin(\alpha) = 0$, откуда $\sin(\beta) = \frac{u}{v} \sin(\alpha) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. Далее используем проекцию этого же равенства на ось x :

$$v' = v \cos(\beta) + u \cos(\alpha) = v \left(\frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{17} + 1}{3\sqrt{2}} v \quad (\text{здесь учтено, что}$$

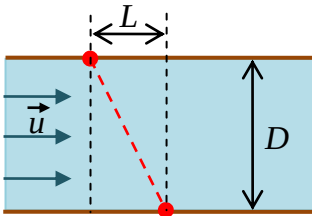
$$\cos(\beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\beta)} = \sqrt{1 - \frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}).$$
 Следовательно, время полета при ветре

$$t' = \frac{s}{v'} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17} + 1} t \approx 149 \text{ минут.}$$

ОТВЕТ: 149.

Задача 2 (4 балла) [скорость, сложение векторов]

Катеру необходимо переправиться через прямолинейный участок реки шириной $D = 60$ м, сместившись при этом против течения на расстояние $L = 25$ м (см. рисунок). Найти минимальное время такой переправы, если катер может развивать скорость $v = 12$ м/с относительно воды, а скорость течения $u = 5$ м/с. Ответ запишите в секундах, округлив до десятых.

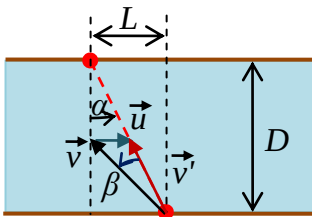


Подсказка 1: Для минимальности времени переправы катер должен двигаться по прямой, развивая свою максимальную скорость.

Подсказка 2: Нужно построить векторный треугольник, определяющий скорость катера относительно берега $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$ так, чтобы $\vec{v}'$ была ориентирована вдоль нужного курса.

Подсказка 3: Удобно записать это равенство в проекциях на направления перпендикулярно курсу катера и вдоль него.

Решение:



Ясно, что для минимальности времени переправы катер должен двигаться по прямой, развивая свою максимальную скорость. Построим векторный треугольник, определяющий скорость катера относительно берега $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$ (см. рисунок). Отметим, что на этом рисунке угол определяется соотношением $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{L}{D} = \frac{5}{12}$, то есть $\sin(\alpha) = \frac{L}{\sqrt{D^2 + L^2}} = \frac{5}{13}$ и

$\cos(\alpha) = \frac{D}{\sqrt{D^2 + L^2}} = \frac{12}{13}$. Запишем проекцию этого равенства на направление, перпендикулярное курсу: $v \sin(\beta) - u \cos(\alpha) = 0$, и найдем, что $\sin(\beta) = \frac{u}{v} \cos(\alpha) = \frac{5}{13}$ (как

видно, мы обнаружили, что $\beta = \alpha$). Перейдем к проекции на курс катера: $v' = v \cos(\beta) - u \sin(\alpha) = \frac{12}{13}v - \frac{5}{13}u = \frac{119}{13}$ м/с. Длина пути катера $s = \sqrt{D^2 + L^2} = 65$ м.

Следовательно, время переправы $t = \frac{s}{v'} \approx 7,1$ с.

ОТВЕТ: 7,1.

Задача 3 (1 балл) [свободное падение, бросок под углом к горизонту]

Тело, брошенное под углом к горизонту над горизонтальным участком поверхности Земли, упало на расстоянии 16 м от точки броска. Известно, что во время полета максимальная высота подъема тела равнялась 4 м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, под каким углом к горизонту был произведен бросок. Ответ запишите в градусах, при необходимости округлив до целого значения.

Подсказка 1: В процессе подъема вертикальная скорость тела уменьшается от $v_0 \sin(\alpha)$ до нуля с постоянным ускорением g , и время подъема $t_n = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$.

Подсказка 2: Максимальная высота подъема $H = v_0 \sin(\alpha) t_n - \frac{gt_n^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$.

Подсказка 3: Полное время полета до падения обратно на Землю $T = 2t_n = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$.

Решение:

Пусть v_0 – начальная скорость тела, а α – искомый угол. В процессе подъема вертикальная скорость тела уменьшается от $v_0 \sin(\alpha)$ до нуля с постоянным ускорением g , и время подъема $t_n = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$. Поэтому максимальная высота подъема $H = v_0 \sin(\alpha)t_n - \frac{gt_n^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$.

Полное время полета до падения обратно на Землю $T = 2t_n = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$, и дальность полета

$$L = x(T) = v_0 \cos(\alpha)T = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha). \text{ Поэтому } \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{4H}{L} = 1. \text{ Значит, } \alpha = 45^\circ.$$

ОТВЕТ: 45.

Задача 4 (3 балла) [свободное падение, бросок под углом к горизонту, сложение векторов, скалярное произведение векторов]

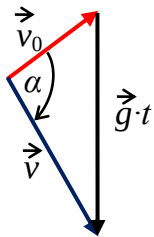
Маленький тяжелый шарик бросили с балкона под углом к горизонту со скоростью 4 м/с. Через время t , когда его скорость стала равна 7 м/с, направление его движения отклонилось от первоначального на 120° . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите t . Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 . Ответ запишите в секундах, округлив до сотых.

Подсказка 1: Нужно использовать векторное равенство $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$.

Подсказка 2: Из этого равенства можно выразить $\vec{g}t = \vec{v} - \vec{v}_0$.

Подсказка 3: Полученное соотношение следует возвести скалярно в квадрат.

Решение:



Тело движется с постоянным ускорением $\vec{g}$. Построим векторный треугольник, отвечающий равенству $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Из этого равенства выразим $\vec{g}t = \vec{v} - \vec{v}_0$, а затем возведем полученное соотношение скалярно в квадрат: $g^2 t^2 = v_0^2 + v^2 - 2v_0 v \cos(\alpha) = v_0^2 + v^2 + v_0 v$. Следовательно,

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + v^2 + v_0 v}}{g} \approx 0,96 \text{ с.}$$

ОТВЕТ: 0,96.

Задача 5 (3 балла) [свободное падение, бросок под углом к горизонту, проекции векторов]

Маленький тяжелый шарик бросили с балкона под углом к горизонту со скоростью 4 м/с. Через некоторое время, когда его скорость стала равна 7 м/с, направление его движения отклонилось от первоначального на 120° . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите угол, под которым был совершен бросок. Ответ запишите в градусах, округлив до целого значения.

Подсказка 1: Нужно использовать векторное равенство $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$.

Подсказка 2: Из этого равенства можно выразить $\vec{g}t = \vec{v} - \vec{v}_0$.

Подсказка 3: Полученное соотношение следует возвести скалярно в квадрат.

Решение:

Тело движется с постоянным ускорением $\vec{g}$. Поэтому по горизонтали оно движется равномерно, так что проекции скоростей $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ на горизонталь равны. Если искомый угол равен α , то вектор $\vec{v}$, согласно условию, составляет с горизонтом угол $\alpha - 120^\circ$. Следовательно, $v_0 \cos(\alpha) = v \cos(\alpha - 120^\circ) = v \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(\alpha) + v \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha)$. Здесь мы воспользовались формулой косинуса разности. Из этого соотношения легко выразить $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2v_0 + v}{v\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{7}$. Таким образом, $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{5\sqrt{3}}{7}\right) \approx 51^\circ$.

ОТВЕТ: 51.

Задача 6 (2 балла) [II закон Ньютона, сложение векторов]

На тело массой 5 кг действуют три силы. Одна из них имеет величину 29 Н, вторая – 22 Н и она направлена в противоположную сторону относительно первой. Третья имеет величину 24 Н и направлена перпендикулярно первой и второй. Найдите модуль ускорения тела. Ответ запишите в м/с^2 , при необходимости округлив до целого значения.

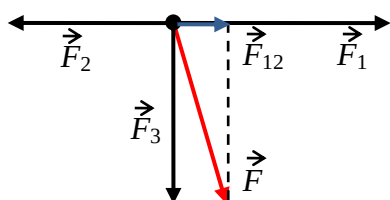
Подсказка 1: Модуль ускорения определяется результирующей силой, которая равна векторной сумме всех трех сил: $|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3|}{m}$.

Подсказка 2: Поскольку первая и вторая сила направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, то их сумма направлена вдоль той же прямой и ее величина равна разности величин первой и второй силы.

Подсказка 3: Третья сила перпендикулярна $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, и величину результирующей силы можно найти с помощью теоремы Пифагора.

Решение:

Ясно, что модуль ускорения определяется результирующей силой, которая равна векторной сумме всех трех сил: $|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3|}{m}$. Поскольку первая и вторая сила направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, то их сумма направлена вдоль той же прямой и ее величина равна разности величин первой и второй силы: $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2| = 7 \text{ Н}$. Третья сила перпендикулярна $\vec{F}_{12}$, и величину результирующей силы можно найти с помощью теоремы Пифагора (см. рисунок): $(\vec{F}_{12} + \vec{F}_3)^2 = F_{12}^2 + F_3^2$. Поэтому $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = \sqrt{F_{12}^2 + F_3^2} = 25 \text{ Н}$, и $|\vec{a}| = 5 \text{ м/с}^2$.



ОТВЕТ: 5.

Задача 7 (3 балла) [II закон Ньютона, сложение векторов]

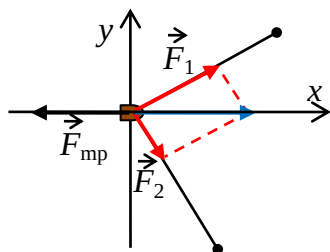
Два тягача тянут груз массой 2 т по горизонтальной поверхности так, что он движется по прямой. Трос первого тягача натянут с силой 8 кН, трос второго – с силой 6 кН, и тросы перпендикулярны друг другу. Коэффициент трения груза о поверхность равен 0,4. Найдите ускорение груза. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 . Ответ запишите в м/с^2 , округлив до целого значения.

Подсказка 1: На груз в горизонтальной плоскости действуют три силы: силы натяжения тросов и сила трения.

Подсказка 2: Направление равнодействующей сил натяжения нам известно – так как груз движется по прямой, то и сдвигающая сила тоже направлена по этой прямой. Поскольку эти силы перпендикулярны, то их равнодействующую можно найти по теореме Пифагора.

Подсказка 3: Сила трения здесь – это сила трения скольжения, она направлена против направления движения груза и равна $F_{\text{тр}} = \mu mg = 8 \text{ кН}$.

Решение:



На груз в горизонтальной плоскости действуют три силы: силы натяжения тросов и сила трения (см. рисунок). Сила трения здесь – это сила трения скольжения, она направлена против направления движения груза (оси x) и равна $F_{\text{тр}} = \mu mg = 8 \text{ кН}$. Направление равнодействующей сил натяжения нам известно – так как груз движется по прямой, то и сдвигающая сила тоже направлена по этой прямой. Поскольку эти силы перпендикулярны, то их равнодействующую можно найти по теореме Пифагора: $F_{12} \equiv |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 10 \text{ кН}$.

Результирующая сила $F = F_{12} - F_{\text{тр}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} - \mu mg = 2 \text{ кН}$. Значит, ускорение груза

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sqrt{F_1^2 + F_2^2} - \mu mg}{m} = 1 \text{ м/с}^2.$$

ОТВЕТ: 1.

Задача 8 (5 баллов) [II закон Ньютона, наклонная плоскость, сложение векторов]

Тело массы m плавно (с постоянной скоростью) тянут вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом с помощью троса, идущего под углом β к плоскости.

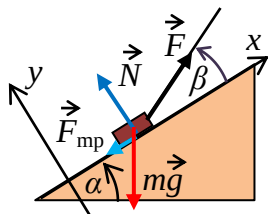
Коэффициент трения тела о плоскость $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$. При какой величине β сила натяжения троса при таком движении будет минимальной? Ответ приведите в градусах, при необходимости округлив до целого значения.

Подсказка 1: Поскольку скорость тела постоянна, то сумма приложенных к нему сил равна нулю, и это равенство удобно записать в проекциях на ось X , направленную против линии «падения воды» на плоскости, и перпендикулярную ей ось y .

Подсказка 2: Проекция на ось y позволяет найти силу нормальной реакции плоскости: $N = mg \cos(\alpha) - F \sin(\beta)$.

Подсказка 3: В проекции на ось X получим условие, что X -компонента силы натяжения троса уравнивает тормозящие силы (силу трения и X -компоненту силы тяжести).

Решение:



Направим ось x против линии «падения воды» на плоскости, а ось y – перпендикулярно ей, и изобразим на рисунке силы, действующие на него: это сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{mp}$ и сила натяжения троса $\vec{F}$. Так как тело не движется по оси y , то $N = mg \cos(\alpha) - F \sin(\beta)$. Поскольку по условию тело скользит вверх, то сила трения (скольжения) направлена против направления движения (оси x). Величина силы трения $F_{mp} = \mu N = \mu [mg \cos(\alpha) - F \sin(\beta)]$. Так как по оси движение происходит с постоянной скоростью, то x -компонента силы натяжения троса уравнивает тормозящие силы (силу трения и x -компоненту силы тяжести): $F \cos(\beta) = F_{mp} + mg \sin(\alpha) = mg [\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] - \mu F \sin(\beta)$. Из этого соотношения находим, что при заданном движении груза сила натяжения троса должна быть равна $F = \frac{\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\mu \sin(\beta) + \cos(\beta)} mg$. Для исследования этого выражения удобно применить тригонометрическое преобразование:

$$\mu \sin(\beta) + \cos(\beta) = \sqrt{1 + \mu^2} \left[\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \sin(\beta) + \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \cos(\beta) \right] = \sqrt{1 + \mu^2} \cdot \cos(\beta - \varphi).$$

Здесь введен угол $\varphi \equiv \arctg(\mu)$ (соответственно $\sin(\varphi) = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ и $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$) и

использована формула косинуса разности. Аналогично $\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \sqrt{1 + \mu^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi)$.

Поэтому $F = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)} mg$. При заданных α и μ минимальное значение силы отвечает максимальному значению $\cos(\beta - \varphi)$, которое равно 1 и достигается при $\beta = \varphi = \arctg(\mu) = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$.

ОТВЕТ: 30.