

11 класс, Экспресс-подготовка к ЕГЭ по физике

Теоретический обзор к занятию 4.

Темы: гармонические колебания.

Термином «колебания» обозначают очень широкий класс процессов (не только механических), в которых какая-либо характеристика многократно меняет направление своего изменения. В зависимости от характера процессов выделяют **незатухающие** и **затухающие** колебания, **периодические**, и **апериодические** колебания. В особый класс обычно выделяются **гармонические колебания** – незатухающие периодические колебания, происходящие по гармоническому закону (то есть зависимость характеристики процесса от времени выражается через гармонические функции – косинус или синус). Например, в механике при гармонических колебаниях материальной точки вдоль одной координатной оси (x) закон движения записывается в виде:

$$x(t) = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь величина x_m называется **амплитудой** колебаний, $\omega \equiv \frac{2\pi}{T}$ – это **циклическая частота**, связанная с периодом колебаний, а величину, находящуюся в аргументе гармонической функции называют **фазой** колебаний (ее значение при $t=0$ φ_0 – «начальная» фаза). При решении задач о гармонических колебаниях важно уметь использовать:

1) кинематические соотношения:

При заданной выше зависимости координаты от времени закон изменения скорости и ускорения имеет вид:

$$v_x(t) = -\omega x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = v_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (v_m = \omega x_m)$$

$$a_x(t) = -\omega^2 x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = a_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) \quad (a_m = \omega^2 x_m)$$

Как видно, амплитуда скорости $v_m = \omega x_m$, и колебания скорости опережают по фазе колебания координаты на $\frac{\pi}{2}$; амплитуда ускорения $a_m = \omega v_m = \omega^2 x_m$, и колебания ускорения происходят в противофазе с колебаниями координаты.

2) уравнение движения:

Гармонические колебания возникают в системах, в которых уравнения движения тел, следующие из второго закона Ньютона, приводятся к виду **уравнения гармонических колебаний**

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

Замечательное свойство этого уравнения состоит в том, что его решение **всегда** можно записать в виде

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \text{ или } x(t) = x_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Более того – вид решения не зависит от того, какова физическая природа величины x (это может быть декартова координата, угол поворота, заряд конденсатора и вообще что угодно). Постоянные величины A и B в этом решении, так же как связанные с ними значения амплитуды x_m и начальной фазы φ_0 обычно определяют из «начальных условий», то есть из значений величины x и ее производной («скорости изменения» x) в начальный момент времени, например, при $t = 0$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ B = v_0 / \omega_0 \end{cases},$$

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2}, \quad \varphi_0 = -\arcsin \left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2}} \right).$$

Этот способ построения решения корректен даже в том случае, когда движение изучаемой системы вообще не является колебанием! Всякий раз, когда уравнение, задающее изменение любой физической величины со временем, принимает вид уравнения гармонических колебаний, можно сделать вывод о том, что в течение некоторого интервала времени эта величина изменяется по гармоническому закону (т.е. по закону синуса или косинуса). В некоторых случаях уравнения можно свести к уравнению колебаний после некоторых преобразований, и тогда подобный вывод тоже будет справедлив. Довольно часто уравнение движения не имеет нужного вида при точной записи, но сводится к нему приближенно, в случае **малой амплитуды**. В этом случае с той же степенью точности и закон движения можно считать гармоническим.

3) превращения энергии:

Свободные гармонические колебания могут возникать только в системах, в которых отсутствуют диссипативные силы, так как в противном случае колебания будут затухающими. Поэтому в процессе гармонических колебаний полная механическая энергия сохраняется, но происходит постоянный переход ее из одной формы в другую. Например, для груза массы m на пружине жесткостью k кинетическая энергия достигает максимума при прохождении положения равновесия, где потенциальная энергия деформированной пружины обращается в ноль, а в точке максимального отклонения они меняются местами:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const} = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}$$

Таким образом, с энергетической точки зрения гармонические колебания – процесс превращения энергии из потенциальной в кинетическую и обратно, причем максимальное значение кинетической энергии равно максимальному значению потенциальной. Как и в случае с уравнением колебаний, при энергетическом анализе встречаются ситуации, когда точные выражения для кинетической и потенциальной энергии не являются квадратичными, но при малых отклонениях от положения равновесия они приближенно превращаются в квадратичные.

Если в системе, совершающей колебания, присутствуют диссипативные силы, то вследствие потерь механической энергии амплитуда колебаний будет убывать, то есть колебания будут затухающими. Убыль энергии механических колебаний, естественно, будет определяться работой диссипативных сил.

Важный класс вопросов ЕГЭ, посвященных гармоническим колебаниям – вопросы о «пределах» гармоничности. В самом деле, если уравнение движения тела, совершающего гармонические колебания, изменятся, то его колебания могут перестать быть гармоническими. Наиболее характерный пример такого события – разрушение связей, передающих действие возвращающих сил. Рассмотрим, например, «обычное» вертикальное колебание груза на пружине, но прикрепим груз к пружине отрезком невесомой нерастяжимой нити.

Пока нить натянута, она «передает» действие силы упругости на груз:

$$\left. \begin{aligned} ma_x &= mg - T \\ T = F_{\text{упр}} &= k \left(\frac{mg}{k} + x \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x'' + \frac{k}{m} x = 0$$

(здесь координата x отсчитывается от положения равновесия, в котором пружина растянута

на $\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$). Поэтому груз совершает гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Но

если ускорение груза достигнет значения $a_x^{(сп)} = g$, то сила натяжения нити обращается в ноль – нить провисает. Конечно же, подвешенный на нити груз не может иметь в проекции на ось, направленную вертикально вниз, ускорение больше g . Таким образом, если отвести груз вниз от положения равновесия на расстояние $x_m > \Delta l_0 = mg/k$ и отпустить без начальной скорости, то закон движения груза будет гармоническим только до достижения точки $x_1 = -mg/k$. При дальнейшем продвижении груза вверх нить провиснет, и груз будет

двигаться под действием одной только силы тяжести, то есть с ускорением g - до тех пор, пока груз не вернется в эту точку и нить снова не натянется. Конечно, движение груза все равно будет иметь характер колебаний, но эти колебания уже не будут гармоническими, так как внутри каждого периода будет участок движения с постоянным ускорением. В этом смысле $x_m = mg/k$ есть максимально возможная амплитуда гармонических колебаний для данной системы.

Из этого примера можно сделать общий вывод, что нарушение гармоничности колебаний в подобных системах связано с разрушением связей между телами, то есть:

- 1) с провисанием нитей,
- 2) с отрывом соприкасающихся поверхностей тел,
- 3) с началом проскальзывания соприкасающихся тел друг по другу (ясно, что любое скольжение негладких поверхностей в системе уничтожает гармоничность свободных колебаний, так как из-за перехода механической энергии в тепло колебания становятся затухающими).

Поэтому при анализе «гармоничности» колебаний системы, в которой в передаче возвращающей силы к телам участвуют связи, в первую очередь надо понять, какие из связей могут перестать действовать и при каких условиях.

Помимо свободных, тела могут совершать **вынужденные** колебания, которые происходят под действием периодической «вынуждающей» силы. Вынужденные колебания даже при наличии трения поддерживаются незатухающими за счет работы вынуждающей силы. Если свободные колебания происходят с собственной частотой, то вынужденные колебания – с частотой вынуждающей силы. Рассмотрим груз на пружине, колеблющийся под действием силы $F_x(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$. Тогда, исходя из уравнения движения

$$m a_x = -k x + F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (\text{здесь собственная частота } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}) \text{ и}$$

считая колебания происходящими «в такт» с вынуждающей силой, получим

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad \text{Таким образом амплитуда вынужденных колебаний}$$

зависит от частоты вынуждающей силы, и при $\omega = \omega_0$ резко возрастает (в отсутствие трения – до бесконечности! Реально степень возрастания ограничивается именно диссипативными силами). Это явление называют **резонансом** в вынужденных колебаниях.

Полностью аналогично механическим рассматриваются **электромагнитные колебания** в колебательном контуре – цепи, составленной из катушки индуктивности и конденсатора.

<место для рисунка 1>

В такой цепи (в отсутствие сопротивления) возникают свободные колебания. В самом деле, уравнение, определяющее закон изменения заряда конденсатора

$$U_C + U_L = 0 \Rightarrow \frac{q_C}{C} + L \frac{d I_L}{d t} = 0$$

$$I_L = \frac{d q_C}{d t} \Rightarrow \frac{d^2 q_C}{d t^2} + \frac{1}{L C} q_C = 0$$

имеет вид уравнения гармонических колебаний. Соответственно законы изменения заряда и тока

$$q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (I_m = \omega q_m).$$

Отметим аналогию с кинематикой механических колебаний: заряд конденсатора и ток в катушке связаны между собой точно так же, как координата и скорость груза на пружине! Это не удивительно, так как ток есть не что иное, как «скорость изменения» заряда. Итак: амплитуда тока и амплитуда заряда связаны соотношением $I_m = \omega q_m$, и колебания тока

опережают по фазе колебания заряда на $\frac{\pi}{2}$. Можно, развивая эту аналогию, установить следующее соответствие величин, характеризующих механические (груз на пружине) и электромагнитные (LC - контур) колебания:

заряд конденсатора q – аналог координаты груза x ;

ток в контуре $I = \frac{dq}{dt}$ – аналог скорости груза v_x ;

скорость изменения тока $\frac{dI}{dt}$ – аналог ускорения груза a_x ;

индуктивность катушки L – аналог массы груза m ;

обратная емкость конденсатора $\frac{1}{C}$ – аналог коэффициента упругости пружины k ;

энергия магнитного поля в катушке $\frac{LI^2}{2}$ – аналог кинетической энергии груза $\frac{mv^2}{2}$;

энергия электрического поля конденсатора $\frac{q^2}{2C}$ – аналог потенциальной энергии пружины $\frac{kx^2}{2}$.

Частота свободных колебаний (ее называют также «собственной частотой» колебательного контура)

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$$

(последнее соотношение называют *формулой Томсона*). Полная энергия колебательного контура

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{const} = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}.$$

При учете сопротивления собственные колебания становятся затухающими, а при включении в контур источника периодической ЭДС возникают *вынужденные* колебания.