

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 4.

Темы: гармонические колебания.

Задача 1 (2 балла) [гармонические колебания, математический маятник]

Шарик на длинной легкой нерастяжимой нити совершает колебания. Максимальная потенциальная энергия шарика в поле тяжести, если ее считать равной нулю в положении равновесия, равна 0,8 Дж. Максимальная скорость шарика в процессе колебаний равна 2 м/с. Чему равна масса шарика? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ запишите в граммах.

Подсказка 1: В процессе колебаний потенциальная энергия шарика в поле тяжести переходит в его кинетическую энергию и обратно, причем их сумма остается неизменной.

Подсказка 2: Максимальная кинетическая энергия достигается при прохождении равновесия, а максимальная потенциальная – в момент остановки.

Решение:

Поскольку сопротивление воздуха отсутствует, то полная механическая энергия сохраняется. В процессе колебаний потенциальная энергия шарика в поле тяжести переходит в его кинетическую энергию и обратно. Максимальная кинетическая энергия, равная $\frac{mv_{\max}^2}{2}$, достигается при прохождении равновесия, а максимальная потенциальная ($E = 0,8 \text{ Дж}$) – в момент остановки. Поэтому $\frac{mv_{\max}^2}{2} = E \Rightarrow m = \frac{2E}{v_{\max}^2} = 0,4 \text{ кг}$.

Ответ: 400.

Задача 2 (4 балла) [закон Гука, пружинный маятник, гармонические колебания]

Небольшой брусок был подвешен неподвижно на невесомой пружине в поле тяжести. Удлинение пружины в этом состоянии было равно $\Delta l_0 = 4,8 \text{ см}$. Удерживая его на месте, к нему прикрепили груз с массой, в два раза превышающей массу самого бруска и аккуратно отпустили. После этого получившийся пружинный маятник совершал практически гармонические вертикальные колебания. Найдите максимальную скорость «составного» груза в ходе этих колебаний. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10 \text{ м/с}^2$, силами трения пренебречь. Ответ выразить в см/с.

Подсказка 1: масса составного груза в три раза больше массы бруска, и новое равновесное удлинение пружины также в три раза больше: $\Delta l_1 = 3 \cdot \Delta l_0$.

Подсказка 2: составной груз начинает колебания без начальной скорости, находясь на расстоянии $x_m = 2 \cdot \Delta l_0$ от положения равновесия.

Подсказка 3: амплитуда колебаний скорости $v_m = \omega x_m$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{3m}}$.

Решение:

Ясно, что масса составного груза в три раза больше массы бруска, и новое равновесное удлинение пружины также в три раза больше: $\Delta l_1 = 3 \cdot \Delta l_0$. Поэтому составной груз начинает колебания без начальной скорости, находясь на расстоянии $\Delta l_1 - \Delta l_0 = 2 \cdot \Delta l_0$ от положения равновесия. Поэтому амплитуда колебаний $x_m = 2\Delta l_0$. Амплитуда колебаний скорости

$v_m = \omega x_m$, где $\omega = \sqrt{\frac{k}{3m}}$ (k - жесткость пружины, а m - масса бруска). С другой стороны,

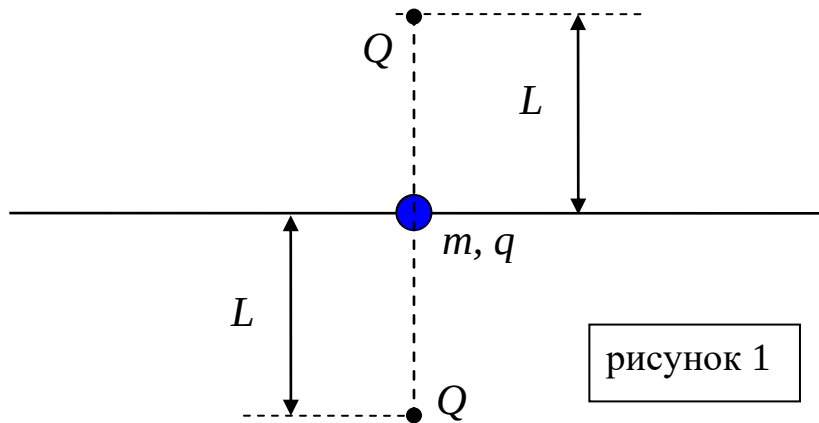
заданное начальное удлинение пружины $\Delta l_0 = \frac{mg}{k} \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta l_0}$. Значит,

$$v_m = \sqrt{\frac{g}{3\Delta l_0}} \cdot 2\Delta l_0 = 2\sqrt{\frac{g\Delta l_0}{3}} = 0,8 \text{ м/с}.$$

Ответ: 80.

Задача 3 (5 баллов) [электростатическое взаимодействие, малые колебания, уравнение гармонических колебаний]

По гладкой горизонтальной непроводящей направляющей может свободно скользить бусинка массой m с зарядом $q > 0$. На линии, перпендикулярной направляющей, на одинаковом расстоянии L от бусинки закрепили неподвижно одинаковые точечные заряды $Q < 0$ (см. рисунок 1). При малом отклонении от начального положения возникли колебания с периодом T_0 . Во сколько раз изменится период малых колебаний бусинки, если величину заряда бусинки уменьшить в 4 раза? Излучением пренебречь.



Подсказка 1: в точке с координатой x , отсчитываемой вдоль направляющей от начального положения, бусинка будет находиться на расстояниях $r_1 = r_2 = \sqrt{L^2 + x^2}$ от закрепленных зарядов.

Подсказка 2: проекция на ось x суммарной силы взаимодействия бусинки с закрепленными зарядами $F_x = -q \cdot 2 \frac{kQ}{L^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}}$.

Подсказка 3: уравнение малых колебаний бусинки приводится к виду уравнения гармонических колебаний $x'' + \frac{2kqQx}{mL^3} = 0$.

Решение:

Направим координатную ось x по линии движения бусинки, совместив начало координат с точкой старта. В точке с координатой x она будет находиться на расстояниях $r_1 = r_2 = \sqrt{L^2 + x^2}$ от закрепленных зарядов, поэтому проекция на ось x суммарной силы взаимодействия бусинки с закрепленными зарядами

$$F_x = -q \cdot 2 \frac{kQ}{L^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}}.$$

Конечно, эта сила не является линейной по x в общем случае, но для малых $x \ll L$

$$F_x \approx -\frac{2kqQx}{L^3},$$

и в результате уравнение малых колебаний бусинки $ma_x = F_x$ приводится к виду уравнения гармонических колебаний $x'' + \frac{2kqQx}{mL^3} = 0$. Таким образом, период малых колебаний бусинки $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{2mL}{kqQ}}$. Поэтому при уменьшении q в 4 раза период колебаний увеличится в два раза.
 Ответ: 2.

Задача 4 (3 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]

В идеальном колебательном контуре, содержащем источник ЭДС (см. рисунок 2), происходят гармонические колебания. На графиках представлены зависимости от времени заряда конденсатора, силы тока, возникающей в катушке ЭДС индукции, энергии магнитного поля в катушке. Определить, к поведению какой из этих величин относится каждый график. Сопротивлением всех элементов контура пренебречь. В качестве ответа напишите подряд номера ответов для случаев А, Б, В и Г (не разделяя знаками препинания, например: 1432).

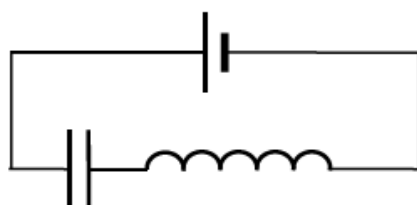
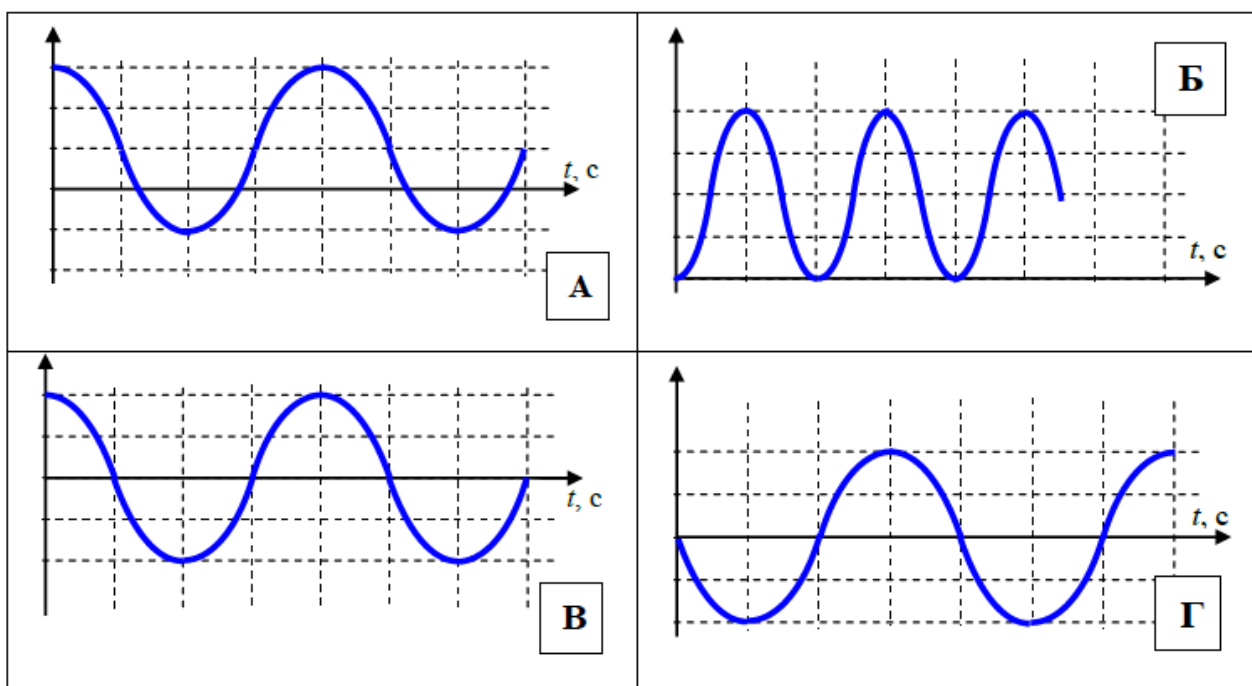


рисунок 2



ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ВРЕМЕНИ	ФИЗИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА
рисунок 2.	1) сила тока 2) ЭДС индукции 3) заряд конденсатора 4) энергия магнитного поля

Таблица для ответа:

А	Б	В	Г

Подсказка 1: проще всего установить, где находится графики заряда конденсатора и энергии магнитного поля.

Подсказка 2: колебания заряда конденсатора из-за присутствия источника происходят «несимметрично» относительно оси времени, несмотря на то, что он меняет знак, а энергия магнитного поля – единственная из заданных величин, которая всегда положительна.

Решение:

Проще всего установить, где находится графики заряда конденсатора и энергии магнитного поля: колебания заряда конденсатора $q(t) = CE + q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ (E – ЭДС источника) происходят «несимметрично» относительно оси времени, несмотря на то, что он меняет знак, поэтому ему соответствует график А (после этого вывода можно заметить, что $\varphi_0 = 0$).

Энергия магнитного поля – единственная из заданных величин, которая всегда положительна, и ей соответствует график Б. Остальные графики легко подобрать к ним: сила тока должна проходить нули и максимумы «синхронно» с энергией магнитного поля (график Г), а ЭДС индукции лишь на постоянную добавку (ЭДС источника) отличается от напряжения на конденсаторе, которое в любой момент времени пропорционально заряду (график В). Проверка: исходя из выражения для заряда можно найти: $I(t) = -\omega q_m \sin(\omega t)$,

$$E_L(t) = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\omega^2 q_m^2}{2} \sin^2(\omega t), \quad E_i = -L \frac{dI}{dt} = L\omega^2 q_m \cos(\omega t) \text{ и проверить, что эти выражения}$$

отвечают найденным графикам.

Ответ: 3421.

Задача 5 (4 балла) [пружинный маятник, гармонические колебания, неупругое соударение]

Небольшой груз, подвешенный на легкой пружине, совершал вертикальные гармонические колебания с амплитудой x_m . При прохождении им (сверху вниз) положения равновесия в него врезался другой такой же груз, непосредственно перед ударом летевший снизу вверх со скоростью, в два раза превосходящей амплитуду колебаний скорости первого груза до удара. В результате удара грузы «слиплись» и продолжили движение вдоль вертикальной оси пружины. Во сколько раз изменилась амплитуда колебаний «составного» груза по сравнению с x_m ? В ответе указать $\frac{x_m}{\tilde{x}_m}$ в виде десятичной дроби, округлив до десятых.

Подсказка 1: можно считать, что при абсолютно неупругом соударении грузов выполняется закон сохранения вертикальной компоненты импульса и поэтому начальная скорость для колебания «составного» груза определяется из соотношения: $m2v_m - mv_m = 2m\tilde{v}_m$.

Подсказка 2: поскольку масса груза возросла в два раза при той же пружине, то новая циклическая частота колебаний $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$.

Подсказка 3: в соответствии с кинематикой гармонических колебаний, амплитуды смещения и скорости связаны соотношением $v_m = \omega x_m$.

Решение:

При описании абсолютно неупругого соударения грузов можно считать, что выполняется закон сохранения вертикальной компоненты импульса и найти из него начальную скорость для колебания «составного» груза с массой, равной удвоенной массе одного груза m : $m2v_m - mv_m = 2m\tilde{v}_m \Rightarrow \tilde{v}_m = \frac{1}{2}v_m$, то есть амплитуда скорости уменьшилась в два раза.

Кроме того, поскольку масса груза возросла в два раза при той же пружине, то новая циклическая частота колебаний $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$. В соответствии с кинематикой гармонических колебаний, амплитуды смещения и скорости связаны соотношением $v_m = \omega x_m$ (и $\tilde{v}_m = \tilde{\omega} \tilde{x}_m$), поэтому:

$$\frac{x_m}{\tilde{x}_m} = \frac{\tilde{\omega} v_m}{\omega \tilde{v}_m} = \sqrt{2} \approx 1,4.$$

Ответ: 1,4.

Задача 6 (4 балла) [сила трения, пружинный маятник, гармонические колебания]

Доска массы $M = 500$ г находится на гладкой горизонтальной поверхности. На доске лежит груз массы $m = 100$ г, прикрепленный к неподвижной стенке легкой пружиной жесткости $k = 15$ Н/м. Ось пружины горизонтальна, коэффициент трения между доской и грузом равен $\mu = 0,4$. Найти максимальную амплитуду гармонических колебаний груза на пружине. Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с². Ответ выразить в миллиметрах, округлив до целых.

Подсказка 1: гармоничность колебаний нарушается, когда груз начинает скользить по доске.

Подсказка 2: пока проскальзывания нет, уравнение движения доски с грузом

$$(M + m)a_x = -kx \Rightarrow x'' + \frac{k}{M + m}x = 0.$$

Подсказка 3: ускорение доски создается силой трения со стороны груза, который прижат к доске силой тяжести, то есть $Ma_m = M\omega^2 x_m \leq \mu mg$.

Решение:

Начнем с определения причины нарушения гармоничности. Пока груз не скользит по доске, они вместе совершают гармонические колебания, но после того, как начинается проскальзывание, механическая энергия переходит в тепло, и колебания начинают затухать, а следовательно – перестают быть гармоническими. Пока проскальзывания нет, уравнение

движения доски с грузом $(M + m)a_x = -kx \Rightarrow x'' + \frac{k}{M + m}x = 0$, и гармонические колебания

происходят с циклической частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}}$. Если амплитуда колебаний равна x_m , то

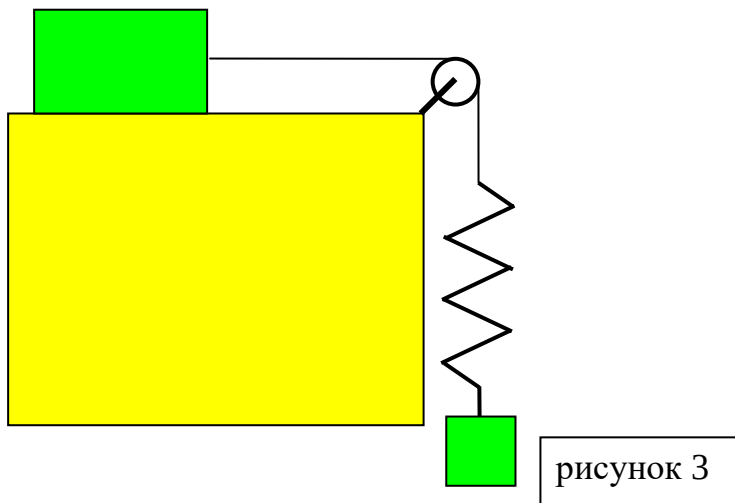
амплитуда изменения ускорения $a_m = \omega^2 x_m = \frac{kx_m}{M + m}$. Ускорение доски создается силой

трения со стороны груза, который прижат к доске силой тяжести. Поскольку в отсутствие проскальзывания должно быть $|F_{mp}| \leq \mu N$, то $Ma_m \leq \mu mg \Rightarrow x_m \leq \frac{\mu m(M + m)g}{Mk} \approx 32$ мм.

Ответ: 32.

Задача 7 (5 баллов) [сила трения, нерастяжимая нить, пружинный маятник, гармонические колебания]

Брусок массой $M = 900$ г покоится на горизонтальном столе. Коэффициент трения между бруском и поверхностью стола $\mu = 0,5$. К бруску с помощью легкой нерастяжимой нити, перекинутой через идеальный блок (см. рисунок 3), прикреплена легкая пружина и груз массы $m = 180$ г. Частота малых колебаний груза $\nu = 3$ Гц. Какова максимально возможная амплитуда этих колебаний, при которых они остаются гармоническими? Ускорение свободного падения считать равным $g \approx 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ записать в миллиметрах, округлив до целых.



Подсказка 1: груз будет совершать гармонические колебания только при выполнении двух условий: брусок не будет скользить по столу и нить не будет провисать.

Подсказка 2: первое условие будет выполнено, если даже при максимальном растяжении пружины (в самом нижнем положении груза) силы натяжения нити будет недостаточно для начала скольжения бруска: $T_m \leq \mu Mg$.

Подсказка 3: второе условие означает, что даже в самом верхнем положении груза пружина не сжата, то есть ее деформация неотрицательна.

Решение:

Ясно, что груз будет совершать гармонические колебания только при выполнении двух условий: брусок не будет скользить по столу (иначе механическая энергия будет переходить в тепло) и нить не будет провисать (при ненатянутой нити груз движется с постоянным ускорением g). Первое условие будет выполнено, если даже при максимальном растяжении пружины (в самом нижнем положении груза) силы натяжения нити будет недостаточно для начала скольжения бруска: $T_m \leq \mu Mg$. Сила натяжения нити создается пружиной.

Максимальное удлинение пружины равно сумме ее равновесного удлинения $\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$ (где k - коэффициент жесткости пружины) и амплитуды колебаний. Значит, первое требование приводит к ограничению на амплитуду:

$$k(\Delta l_0 + x_m) \leq \mu Mg \Rightarrow x_m \leq A_1 = \frac{(\mu M - m)g}{k}.$$

Второе условие означает, что даже в верхнем положении груза пружина не сжата, то есть ее деформация неотрицательна:

$$\Delta l_0 - x_m \geq 0 \Rightarrow x_m \leq A_2 = \frac{mg}{k}.$$

Для выполнения обоих требований необходимо и достаточно, чтобы

$$x_m \leq \min\{A_1, A_2\} = \min\left\{\frac{(\mu M - m)g}{k}, \frac{mg}{k}\right\}.$$

Частота гармонических колебаний груза на пружине $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m(2\pi\nu)^2$, поэтому

$$x_m \leq \min\left\{\frac{(\mu M - m)g}{m(2\pi\nu)^2}, \frac{g}{(2\pi\nu)^2}\right\}.$$

В данной задаче $A_1 = \frac{(\mu M - m)g}{m(2\pi\nu)^2} \approx 4,2$ см, а $A_2 = \frac{g}{(2\pi\nu)^2} \approx 2,8$ см, поэтому основным оказывается второе ограничение.

Ответ: 28.

Задача 8 (3 балла) [гармонические колебания, колебательный контур]

В идеальном колебательном контуре происходят свободные электромагнитные колебания. В таблице показано, как изменялся заряд на одной из обкладок конденсатора в контуре с течением времени:

t , мкс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q , нКл	2	1,42	0	-1,42	-2	-1,42	0	1,42	2	1,42

Чему равно максимальное значение силы тока в катушке. Ответ дайте в мА, округлив до десятых.

Подсказка 1: Из таблицы видно, что период колебаний в катушке $T = 8$ мкс, а максимальный заряд конденсатора $q_{\max} = 2$ нКл.

Подсказка 2: Максимальная сила токи в катушке и максимальный заряд конденсатора связаны соотношением $\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C}$.

Подсказка 3: Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Решение:

Из таблицы видно, что период колебаний в катушке $T = 8$ мкс, а максимальный заряд конденсатора $q_{\max} = 2$ нКл. В соответствии с законом сохранения энергии, максимальная сила токи в катушке и максимальный заряд конденсатора связаны соотношением

$\frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{q_{\max}^2}{2C} \Rightarrow I_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}} q_{\max}$. Согласно формуле Томсона, $T = 2\pi\sqrt{LC}$, поэтому

$$I_{\max} = \frac{2\pi}{T} q_{\max} \approx 1,6 \text{ мА}.$$

Ответ: 1,6.

Задача 9. (4 балла) [гармонические колебания, колебательный контур, закон колебаний]

В идеальном колебательном контуре происходят гармонические колебания с периодом $T = 0,628$ мс. В некоторый момент времени заряд конденсатора оказался равен $q_0 = 20$ мкКл, а ток в катушке $I_0 = 0,1$ А (полярность показана на рисунке 5). Через какое время после этого заряд конденсатора впервые обратится в ноль? Ответ выразить в мс, округлив до десятых.

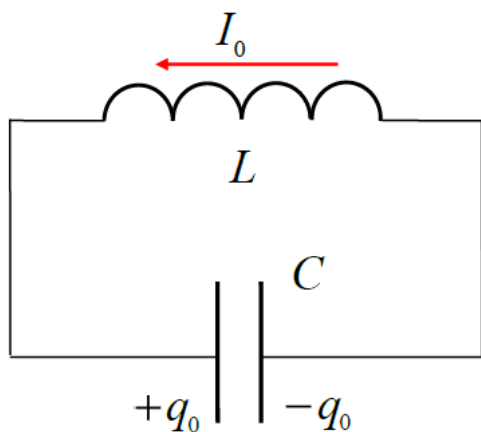


рисунок 5

Подсказка 1: гармонические колебания заряда и тока в идеальном контуре описываются выражениями: $q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, $I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Подсказка 2: в момент времени $t = 0$ начальные значения $q_0 = q_m \cdot \cos(\varphi_0)$, $I_0 = -\omega q_m \cdot \sin(\varphi_0)$ (причем I_0 положительно в соответствии с направлением тока, показанным на рисунке 4 – видно, что ток «дозаряжает» конденсатор).

Подсказка 3: из этих соотношений: $tg(\varphi_0) = -\frac{I_0}{\omega q_0} = -\frac{I_0 T}{2\pi q_0} \approx -0,5$.

Решение:

Гармонические колебания заряда и тока в идеальном контуре описываются выражениями:

$$q(t) = q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad I(t) = -\omega q_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0). \quad \text{Поэтому} \quad q_0 = q_m \cdot \cos(\varphi_0),$$

$I_0 = -\omega q_m \cdot \sin(\varphi_0)$ (причем I_0 положительно в соответствии с направлением тока, показанным на рисунке 4 – видно, что ток «дозаряжает» конденсатор). Как видно,

$$tg(\varphi_0) = -\frac{I_0}{\omega q_0} = -\frac{I_0 T}{2\pi q_0} \approx -0,5. \quad \text{Моменты обращения заряда в ноль определяются из}$$

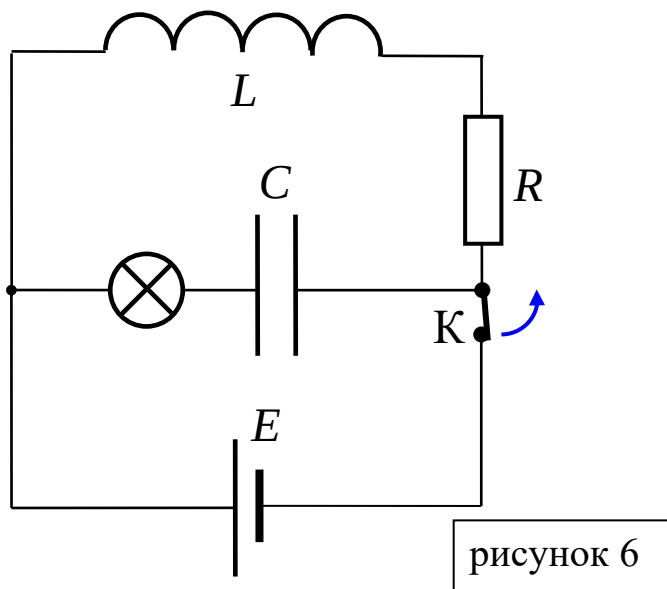
равенства $q(t) = 0 \Rightarrow \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$. Минимальный положительный корень отвечает

$$t = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg(0,5) \right) = T \left(\frac{1}{4} + \frac{\arctg(0,5)}{2\pi} \right) \approx 0,2 \text{ мс.}$$

Ответ: 0,2.

Задача 10 (4 балла) [закон Ома, колебательный контур, энергия колебаний, затухающие колебания]

В схеме, показанной на рисунке 4, ключ К достаточно долго был замкнут. Какое количество теплоты выделится в нити лампы после размыкания ключа? Емкость конденсатора $C = 5 \text{ мкФ}$, индуктивность катушки $L = 50 \text{ мГн}$, сопротивление нити лампочки можно считать постоянным и равным трети сопротивления резистора $R = 100 \text{ Ом}$, омическое сопротивление катушки и внутреннее сопротивление источника пренебрежимо малы. ЭДС источника $E = 80 \text{ В}$. Ответ выразить в мДж.



Подсказка 1: пока ключ замкнут, в ветви с катушкой и резистором течет постоянный ток

$$I_0 = \frac{E}{R}, \quad \text{а напряжение на конденсаторе равно } E.$$

Подсказка 2: после размыкания ключа в контуре начинаются затухающие колебания, в ходе которых практически вся накопленная энергия (то есть энергия полей в конденсаторе и в катушке) выделяется в схеме в виде тепла.

Подсказка 3: это тепло распределяется между элементами контура пропорционально их сопротивлениям.

Решение:

Пока ключ был замкнут, схема перешла в «установившийся» (стационарный) режим, в котором в ветви с катушкой и резистором течет постоянный ток, определяемый из закона Ома для полной цепи: $I_0 = \frac{E}{R}$, напряжение на конденсаторе равно E , и его заряд $q_0 = CE$.

После размыкания ключа в контуре начинаются затухающие колебания, в ходе которых вся накопленная энергия $W_0 = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{LI_0^2}{2} = \left(C + \frac{L}{R^2}\right) \frac{E^2}{2}$ выделяется в схеме в виде тепла (излучением пренебрегаем). Это тепло распределяется между элементами контура пропорционально их сопротивлениям (так как все они соединены последовательно). Пренебрегая сопротивлением катушки, приходим к выводу, что четверть общего количества теплоты (Q_1) выделяется в нити лампы, а три четверти (Q_2) – в резисторе. Таким образом,

$$Q_1 = \frac{1}{4}W_0 = \left(C + \frac{L}{R^2}\right) \frac{E^2}{8} = 8 \text{ мДж}.$$

Ответ: 8.