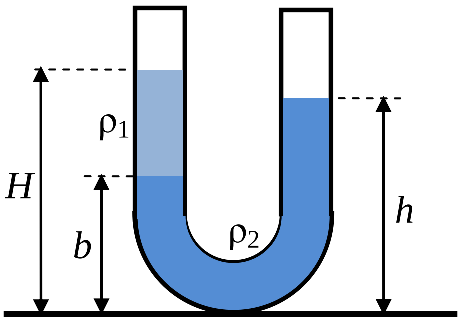
11 класс, Экспресс-подготовка к ЕГЭ по физике

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 3.

Темы: гидростатика, закон сохранения энергии, закон сохранения импульса.

Задача 1 (2 балла) [закон Паскаля, гидростатическое равновесие]
В U-образную трубку с широкими вертикальными прямыми коленами налиты неизвестная жидкость плотностью ρ_1 и вода плотностью $\rho_2 = 1000$ кг/м^3 (см. рисунок 1). На рисунке $b = 10$ см, $h = 24$ см, $H = 30$ см. Найдите плотность жидкости ρ_1. Ответ запишите в кг/м^3.

рисунок 1



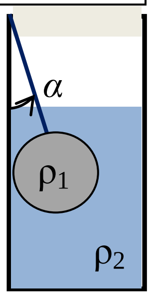
Подсказка 1: Под уровнем высоты b над столом находится только вода, давление в которой на одном уровне одинаково.
Подсказка 2: На этом уровне давление в правом и левом колене одно и то же.
Подсказка 3: Это давление в левом колене создается столбом неизвестной жидкости высотой $H - b$, а в правом – столбом воды высотой $h - b$.

Решение:

Под уровнем высоты b над столом находится только вода, давление в которой на одном уровне одинаково, поэтому на этом уровне давление в правом и левом колене одно и то же. Это давление в левом колене создается столбом неизвестной жидкости высотой $H - b$, а в правом – столбом воды высотой $h - b$. Таким образом, условие гидростатического равновесия имеет вид: $\rho_1 (H - b) g = \rho_2 (h - b) g$. Из этого уравнения находим, что $\rho_1 = \dfrac{h - b}{H - b} \rho_2 = 750$ кг/м^3.
Ответ: 750.

Задача 2 (3 балла) [закон Архимеда, условия равновесия]
Свинцовый шар подвешен на нити и полностью погружен в воду (см. рисунок 2). Нить образует с вертикалью угол $\alpha = 30°$. Нить действует на шар с силой 42 Н. Плотность свинца $\rho_1 = 11300$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1000$ кг/м^3. Определите массу шара. Трением шара о стенку пренебречь. Сделайте схематический рисунок с указанием сил, действующих на шар. Ответ дайте в килограммах.

рисунок 2



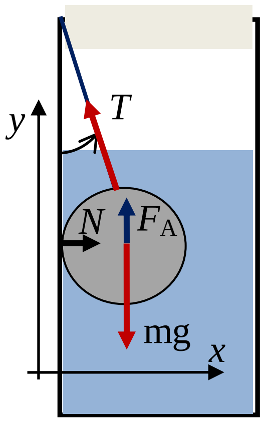
Подсказка 1: На шар действуют: сила тяжести, сила Архимеда, сила натяжения нити и сила нормальной реакции стенки.

Подсказка 2: Условие равновесия сил в проекции на вертикальную ось $F_A + T\cos(\alpha) - mg = 0$.

Подсказка 3: Сила Архимеда равна $F_A = \rho_2 Vg$ (где V – объем шара), а сила тяжести $mg = \rho_1 Vg$.

Решение:

В первую очередь сделаем рисунок с указанием сил, действующих на шар:

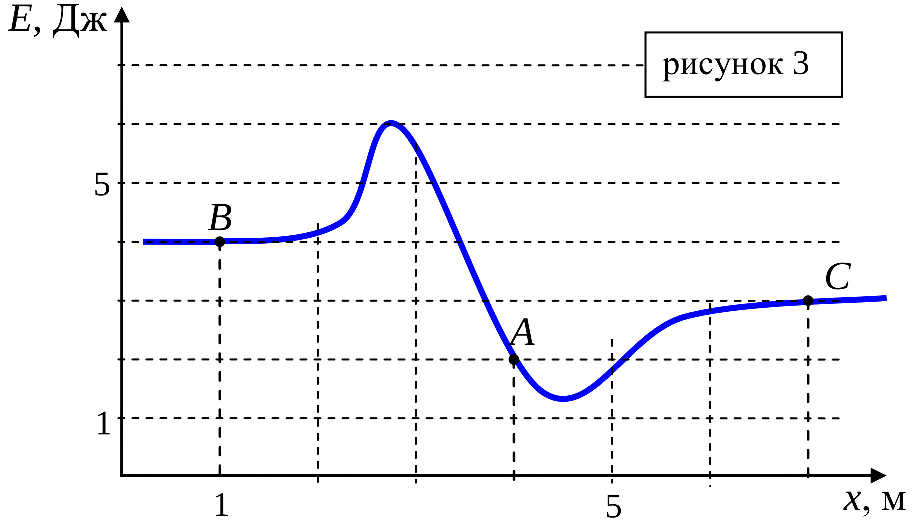


На шар действуют: сила тяжести, сила Архимеда, сила натяжения нити и сила нормальной реакции стенки. Условие равновесия сил в проекции на ось y $F_A + T\cos(\alpha) - mg = 0$. Сила Архимеда равна $F_A = \rho_2 Vg$ (где V – объем шара), а сила тяжести $mg = \rho_1 Vg$, поэтому $F_A = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} mg$. Значит, $m = \dfrac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \dfrac{T\cos(\alpha)}{g} \approx 4$ кг.

Ответ: 4.

Задача 3 (3 балла) [закон изменения кинетической энергии, потенциальная энергия, сила трения]

Небольшое тело массой $m = 1$ кг совершает прямолинейное поступательное движение под действием потенциальной силы и силы трения. На графике (см. рисунок 3) представлена зависимость потенциальной энергии тела от координаты, отсчитываемой вдоль линии движения (за пределами этого участка потенциальная энергия неизменна). В начальный момент тело находится в точке A и движется со скоростью v. Направление движения определяется в соответствии с рисунком (то есть движение «вправо» - это движение в положительном направлении оси x). Сила трения постоянна по величине и равна $F_{тр} = 1$ Н. Проанализировать дальнейшее движение тела и указать результат движения в соответствии с таблицей. В качестве ответа напишите подряд номера ответов для случаев А , Б, В и Г (не разделяя знаками препинания, например: 2131).



СКОРОСТЬ И НАПРАВЛЕНИЕ	РЕЗУЛЬТАТ
А) $v = 3{,}5$ м/с, движение влево Б) $v = 2{,}9$ м/с, движение влево В) $v = 2{,}9$ м/с, движение вправо Г) $v = 1{,}9$ м/с, движение вправо	1) достигнет точки C 2) достигнет точки B 3) не достигнет ни B, ни C

Таблица для ответа:

А	Б	В	Г

Подсказка 1: убыль полной механической энергии тела обусловлена работой силы трения.
Подсказка 2: поэтому условие попадания из точки 1 в точку 2, между которыми потенциальная энергия меняется **монотонно**, имеет вид: $E_K(1) \geq U(2) - U(1) + |F_{тр}| \cdot |x_2 - x_1|$.

Подсказка 3: если между точками 1 и 2 есть **максимум** функции $U(x)$, то для попадания в точку 2 тело сначала должно пройти точку максимума.

Решение:

При движении тела вправо его потенциальная энергия монотонно растет, а механическая энергия убывает. Убыль полной механической энергии тела обусловлена работой постоянной по величине силы трения, поэтому условие достижения точки C имеет вид: $\frac{mv_A^2}{2} \geq U(C) - U(A) + |F_{тр}| \cdot |x_A - x_C| = 4$ Дж. Отсюда следует, что при старте вправо тело достигнет точки C, если $v_A \geq v_1 \approx 2{,}83$ м/с.

При движении тела влево между точками A и B есть максимум потенциальной энергии, и для достижения точки B тело должно пройти точку максимума, то есть должно выполнится условие $\frac{mv_A^2}{2} \geq U_m - U(A) + |F_{тр}| \cdot |x_m - x_A| \approx 5{,}3$ Дж. Значит, $v_A \geq v_2 \approx 3{,}26$ м/с. Если скорость меньше, то тело может изменить направление своего движения после остановки, но точки C оно все равно не достигнет, так как даже при скатывании из точки максимума запас энергии (3 Дж) будет меньше величины работы силы трения ($|F_{тр}| \cdot |x_m - x_C| \approx 4{,}3$ Дж).

Ответ: 2313.

Задача 4 (3 балла) [закон сохранения механической энергии, сила тяжести]

Мячик брошен под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Значение потенциальной энергии в точке бросания мяча принято равным нулю. Какой угол с горизонтом будет составлять вектор скорости мяча в тот момент, когда его кинетическая энергия станет равна потенциальной энергии? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ запишите в градусах.

Подсказка 1: из закона сохранения механической энергии $E_K + U = \frac{mv_0^2}{2}$.

Подсказка 2: если $E_K = U$, то $E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4} \Rightarrow v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$.

Подсказка 3: горизонтальная составляющая скорости остается неизменной и равной $v_0 \cos\alpha$.

Решение:

Из закона сохранения механической энергии $E_K + U = \frac{mv_0^2}{2}$. По условию $E_K = U$. Значит, $E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4} \Rightarrow v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Поскольку горизонтальная составляющая скорости остается неизменной и равной $v_0 \cos\alpha$, то искомый угол определяется из уравнения $\cos\beta = \frac{v_0 \cos\alpha}{v}$, откуда получаем: $\cos\beta = \sqrt{2} \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45°$.

Ответ: 45.

Задача 5 (5 баллов) [закон сохранения импульса, изменение механической энергии, сила трения]

Небольшой брусок массы $M = 493$ г покоился на горизонтальной шероховатой поверхности. При этом он был прикреплен к одному из концов легкой длинной пружины жесткостью $k = 25$ Н/м. Второй конец пружины закреплен неподвижно, ось пружины проходит через центр масс бруска, пружина находилась в недеформированном состоянии. В брусок врезалась пуля массы $m = 7$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v_0 = 200$ м/с вдоль оси пружины, и застряла в нем. Какой путь пройдет брусок до остановки? Коэффициент трения между бруском и поверхностью равен $\mu = 0{,}7$. Ответ запишите в см. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

Подсказка 1: при описании взаимодействия пули с бруском можно пренебречь силой трения и считать, что выполняется закон сохранения горизонтальной компоненты импульса и найти из него начальную скорость движения бруска с застрявшей в нем пулей $V_0 = \frac{m}{M+m} v_0$.

Подсказка 2: при скольжении бруска механическая энергия уменьшается за счет работы силы трения, и при этом деформация пружины равна пройденному пути.

Подсказка 3: путь бруска до первой остановки удовлетворяет уравнению $s_1^2 + \frac{2\mu(M+m)g}{k} s_1 - \frac{(M+m)V_0^2}{k} = 0$.

Подсказка 4: после первой остановки сила упругости деформированной пружины $|F_{упр}| = ks_1 = 7$ Н больше, чем максимальная сила трения покоя $\mu(M+m)g = 3{,}5$ Н, и поэтому брусок после остановки начнет возвратное движение.

Решение:

При описании взаимодействия пули с бруском можно пренебречь силой трения и считать, что выполняется закон сохранения горизонтальной компоненты импульса и найти из него начальную скорость движения бруска с застрявшей в нем пулей: $mv_0 = (M+m)V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{m}{M+m} v_0$.

При скольжении бруска механическая энергия уменьшается за счет работы силы трения, и пи этом деформация пружины равна пройденному пути: скорость бруска V после прохождения пути s удовлетворяет соотношению $\frac{(M+m)V_0^2}{2} - \frac{(M+m)V^2}{2} - \frac{ks^2}{2} = \mu(M+m)gs$. Таким образом, путь до первой остановки бруска ($V = 0$) удовлетворяет уравнению

$$s_1^2 + \frac{2\mu(M+m)g}{k} s_1 - \frac{(M+m)V_0^2}{k} = 0\,.$$

Выбирая физический (положительный) корень, находим:

$$s_1 = -\frac{\mu(M+m)g}{k} + \sqrt{\frac{\mu^2 (M+m)^2 g^2}{k^2} + \frac{(M+m)V_0^2}{k}} = 0{,}28 \text{ м.}$$

Проверим, останется ли брусок на месте после остановки: сила упругости деформированной пружины $|F_{упр}| = ks_1 = 7$ Н больше, чем максимальная сила трения покоя $\mu(M+m)g = 3{,}5$ Н, и поэтому брусок после остановки начнет возвратное движение. Снова записывая закон сохранения энергии для определения точки второй остановки, в которой пружина будет растянута на величину x_2 (а пройденный до остановки путь $s_2 = s_1 + x_2$):

$$\frac{ks_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = \mu(M+m)g(s_1 + x_2) \Rightarrow x_2^2 + \frac{2\mu(M+m)g}{k} x_2 = s_1^2 - \frac{2\mu(M+m)g}{k} s_1 = 0\,.$$

Следовательно, $x_2 = 0$, и поэтому $s_2 = s_1$, и после второй остановки пружина уже не будет деформирована, и брусок окончательно остановится. Поэтому

$$s = 2s_1 = -\frac{2\mu(M+m)g}{k} + 2\sqrt{\frac{\mu^2 (M+m)^2 g^2}{k^2} + \frac{(M+m)V_0^2}{k}} = 0{,}56 \text{ м.}$$

Ответ: 56.

Задача 6 (4 балла) [закон сохранения энергии, центростремительное ускорение, отрыв от поверхности]

Тело массой $m = 1$кг соскальзывает по наклонному желобу, плавно переходящему в закругление радиуса $R = 0{,}5$ м, проходящее в одной вертикальной плоскости с желобом. Поднимаясь по закруглению, тело отрывается от желоба в точке, расположенной на высоте $h = 0{,}25$ м над центром закругления. Известно, что соскальзывание началось без начальной скорости из точки на высоте $H = 1$м над точкой отрыва. Найти модуль работы сил трения за все время скольжения тела от начала скольжения до отрыва. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Ответ привести в Джоулях.

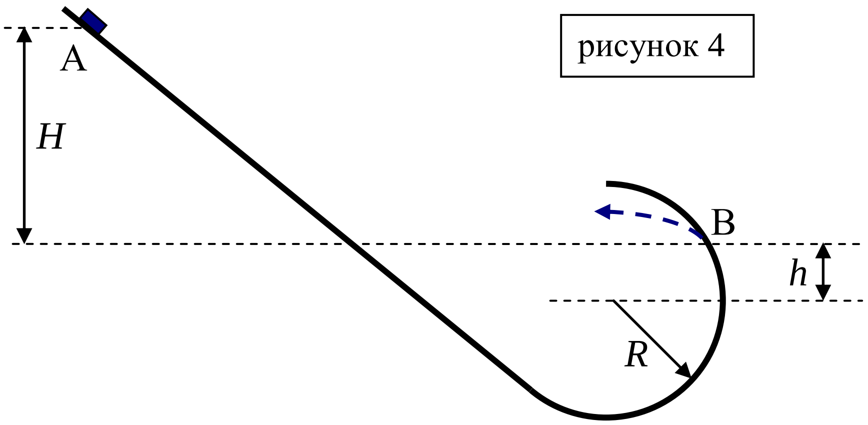


рисунок 4

Подсказка 1: изменение механической энергии тела на пути от точки старта (A) к точке отрыва (B) обусловлено именно работой сил трения, величину которой надо найти, поэтому: $mgH - \frac{mv_B^2}{2} = |A_{тр}|$.

Подсказка 2: в точке B сила нормальной реакции поверхности закругления обращается в ноль, и поэтому центростремительная компонента ускорения создается только силой тяжести: $m\frac{v_B^2}{R} = mg\cos\alpha$.

Подсказка 3: должно быть ясно, что α - угол между радиусом закругления, проведенным в точку В, и вертикалью, то есть $\cos\alpha = \frac{h}{R}$.

Решение:

Изменение механической энергии тела на пути от точки старта (А) к точке отрыва (В) обусловлено именно работой сил трения, величину которой надо найти, поэтому: $mgH - \frac{mv_B^2}{2} = |A_{тр}|$ (в точке А скорость равна нулю, а H - как раз разность высот точек А и В). С другой стороны в точке В сила нормальной реакции поверхности закругления обращается в ноль, и поэтому центростремительная компонента ускорения создается только силой тяжести: $m\frac{v_B^2}{R} = mg\cos\alpha$, где α - угол между радиусом закругления, проведенным в точку В, и вертикалью. Из геометрии ясно, что $\cos\alpha = \frac{h}{R}$. Объединяя эти соотношения, получим: $|A_{тр}| = mg\left(H - \frac{h}{2}\right) = 8{,}75$ Дж.

Ответ: 8,75.

Задача 7 (4 балла) [закон сохранения энергии, центростремительное ускорение, отрыв от поверхности]

Небольшая шайба после удара скользит вверх по шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. В верхней точке А плоскость без излома переходит в внешнюю поверхность горизонтальной трубы радиусом $R = 0{,}5$ м. Длина участка наклонной плоскости, пройденная шайбой, составляет $L = 1$ м, коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0{,}1$. Найти величину начальной скорости шайбы v_0, при превышении которой шайба оторвется от поверхности в точке А. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Ответ записать в м/с, округлив до сотых.

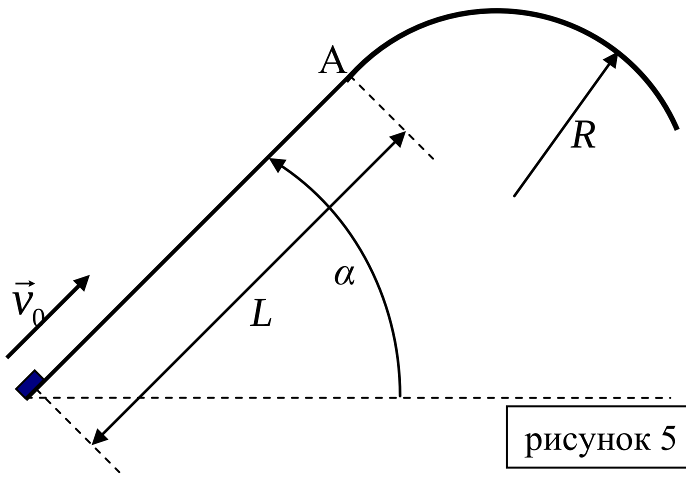


рисунок 5

Подсказка 1: убыль механической энергии шайбы при скольжении вверх по плоскости связана с работой силы трения.

Подсказка 2: поэтому ее скорость в точке А $v_A^2 = v_0^2 - 2gL(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

Подсказка 3: в точке А центростремительное ускорение шайбы создается разностью нормальной составляющей силы тяжести и силы нормальной реакции поверхности: $m\frac{v_A^2}{R} = mg\cos\alpha - N$.

Решение:

Убыль механической энергии шайбы при скольжении вверх по плоскости связана с работой силы трения: $\frac{mv_A^2}{2}+mgL\sin\alpha-\frac{mv_0^2}{2}=-\mu mgL\cos\alpha$. В точке А центростремительное ускорение шайбы создается разностью нормальной составляющей силы тяжести и силы нормальной реакции поверхности: $m\frac{v_A^2}{R}=mg\cos\alpha-N$, поэтому условие отрыва шайбы (обращение N в ноль) требует, чтобы $v_A^2>gR\cos\alpha$. Выражая v_A^2 из первого уравнения, получим:

$$v_A^2=v_0^2-2gL(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0>\sqrt{g[R\cos\alpha+2L(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)]}\approx 4{,}37 \text{ м/с.}$$

Ответ: 4,37.

Задача 8 (4 балла) [закон сохранения энергии, центростремительное ускорение, провисание нити]

Маленький тяжелый шар подвешен неподвижно на легкой нерастяжимой нити длиной $l=50$ см. Ему сообщают некоторую скорость V_0, направленную горизонтально, в результате чего он стал двигаться по окружности на натянутой нити. Сила натяжения нити обратилась в ноль в тот момент, когда кинетическая энергия стала равной четверти его потенциальной энергии (началом отсчета потенциальной энергии является уровень начального положения). Найти величину V_0. Ускорение свободного падения принять равным g = 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ записать в м/с.

Подсказка 1: при движении шара по окружности закон сохранения энергии позволяет найти, что $V^2=V_0^2-2gl(1-\cos\alpha)$, где α - угол поворота нити от начального положения.

Подсказка 2: сила натяжения находится из уравнения для центростремительной компоненты ускорения $T=m\left[\frac{V_0^2}{l}+g(3\cos\alpha-2)\right]$.

Подсказка 3: угол, при котором происходит провисание нити, находится из условия $T=0$.

Решение:

При движении шара по окружности закон сохранения энергии позволяет найти, что $V^2=V_0^2-2gl(1-\cos\alpha)$, где α - угол поворота нити от начального положения. Соотношение энергий, заданное в условии, определяет связь начальной скорости и угла провисания нити:

$$\frac{mV^2}{2}=\frac{mV_0^2}{2}-mgl(1-\cos\alpha)=\frac{1}{4}mgl(1-\cos\alpha)\Rightarrow V_0^2=\frac{5}{2}gl(1-\cos\alpha).$$

С другой стороны, сила натяжения находится из уравнения для центростремительной компоненты ускорения:

$$m\frac{V^2}{l}=m\frac{V_0^2}{l}-2mg(1-\cos\alpha)=T-mg\cos\alpha\Rightarrow T=m\left[\frac{V_0^2}{l}+g(3\cos\alpha-2)\right].$$

Поэтому угол провисания нити $\cos\alpha=\frac{1}{3}\left(2-\frac{V_0^2}{gl}\right)$. Подставляя его в уравнение, полученное из соотношения для энергий, находим: $V_0=\sqrt{5gl}=5$ м/с.

Ответ: 5.

Задача 9 (4 балла) [закон сохранения импульса, неупругое соударение, закон сохранения энергии]

Два небольших шарика из пластилина подвешены на нитях одинаковой длины, так, что они слегка касаются друг друга. Один из них (массой m) отвели от вертикали на угол $\alpha = 60°$ и отпустили без начальной скорости. После его лобового удара о другой шарик (массой M) они слиплись и далее двигались вместе. Максимальное отклонение нитей от вертикали при этом оказалось равно $\beta = 45°$. Найти отношение масс шариков $\frac{M}{m} = ?$ Ответ записать в виде десятичной дроби, округлив до десятых. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Подсказка 1: закон сохранения энергии для движения первого шара на нити длиной L от отпускания до удара дает: $mgL(1-\cos\alpha) = \frac{mv^2}{2}$.

Подсказка 2: закон сохранения импульса при неупругом ударе шаров $mv = (m+M)V$.

Подсказка 3: закон сохранения энергии для движения слипшихся шаров от удара до остановки: $\frac{(m+M)V^2}{2} = (m+M)gL(1-\cos\beta)$.

Решение:

Запишем законы сохранения для разных процессов: закон сохранения энергии для движения первого шара от отпускания до удара: $mgL(1-\cos\alpha) = \frac{mv^2}{2}$ (здесь L - длина нити, а v - скорость шара перед ударом); закон сохранения импульса при неупругом ударе (закон сохранения механической энергии не работает!): $mv = (m+M)V$; закон сохранения энергии для движения слипшихся шаров от удара до остановки: $\frac{(m+M)V^2}{2} = (m+M)gL(1-\cos\beta)$. Исключая скорости из этих соотношений, получаем: $m(1-\cos\alpha) = (m+M)(1-\cos\beta)$. Отсюда выражаем искомую величину: $\frac{M}{m} = \frac{2-\cos\beta-\cos\alpha}{1-\cos\beta} = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 1+2\sqrt{2} \approx 3{,}8$.

Ответ: 3,8.

Задача 10 (4 балла) [закон сохранения импульса, закон сохранения энергии, движение в поле тяжести]

Снаряд, выпущенный из орудия под углом к горизонту над плоским горизонтальным участком земной поверхности, взорвался в верхней точке траектории. При этом образовались два осколка. Первый из них упал на землю спустя время t_1, которое оказалось ровно в два раза меньше, чем время полета снаряда от выстрела до взрыва, а второй – спустя время t_2, которое оказалось ровно в два раза больше времени полета. Найти отношение масс осколков. Сопротивлением воздуха и массой пороховых газов пренебречь.

Подсказка 1: время подъема снаряда до верхней точки $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, а высота подъема $h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$, где v_0 и α - начальная скорость и угол вылета снаряда.

Подсказка 2: время падения каждого осколка определяется только вертикальной составляющей его скоростей сразу после взрыва u из уравнения $h + ut - \frac{gt^2}{2} = 0$.

Подсказка 3: закон сохранения вертикальной составляющей импульса при взрыве имеет вид $0 = m_1u_1 + m_2u_2$.

Решение:

Во время полета от выстрела до взрыва ускорение снаряда было равно ускорению свободного падения, поэтому время подъема снаряда до верхней точки $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, где v_0 и α - начальная скорость и угол вылета снаряда соответственно. Высота подъема определяется из закона сохранения энергии: поскольку скорость в верхней точке направлена по горизонтали и равна $v_0 \cos\alpha$, то $\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv_0^2 \cos^2\alpha}{2} \Rightarrow h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$. Времена падений осколков определяются только вертикальными составляющими их скоростей сразу после взрыва u (ускорения осколков одинаковы и равны g): $h + ut - \frac{gt^2}{2} = 0$. Из этого уравнения находим его положительный корень: $t = \frac{u}{g} + \sqrt{\frac{u^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$. Значит, по заданным временам можно найти вертикальные составляющие скоростей осколков сразу после взрыва

$$\left\{\begin{aligned} t_1 &= \frac{u_1}{g} + \sqrt{\frac{u_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = \frac{t}{2} \\ t_2 &= \frac{u_2}{g} + \sqrt{\frac{u_2^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = 2t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} u_1 &= -\frac{3}{4}gt = -\frac{3}{4}v_0 \sin\alpha \\ u_2 &= +\frac{3}{4}gt = +\frac{3}{4}v_0 \sin\alpha \end{aligned}\right. .$$

Как видно, они в точности противоположны друг другу. Из закона сохранения вертикальной составляющей импульса при взрыве: $0 = m_1 u_1 + m_2 u_2$ найдем, что $\frac{m_1}{m_2} = -\frac{u_2}{u_1} = 1$.

Ответ: 1.