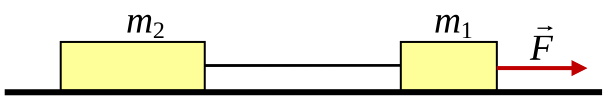
11 класс, Экспресс-подготовка к ЕГЭ по физике

Набор задач для самостоятельного решения по занятию 2.

Темы: задачи по динамике и статике в заданиях ЕГЭ.

Задача 1 (2 балла) [прямолинейное движение, уравнение движения, нерастяжимая нить]

Два груза, связанные нерастяжимой и невесомой нитью, движутся по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$, приложенной к грузу массой $m_1 = 800$ г (см. рисунок). Нить может выдержать нагрузку не более 9 Н. В данном опыте нить обрывается, когда величина силы $\vec{F}$ превышает 15 Н. Чему равна масса второго груза m_2? Ответ запишите в килограммах.



Подсказка 1: оба груза и нить движутся с одинаковым ускорением.

Подсказка 2: это ускорение равно $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$.

Решение:

Ясно, что оба груза и нить движутся с одинаковым ускорением $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$. Ускорение второго груза создает сила натяжения нити T, и из уравнения движения $m_2 a = T$ легко связать силу натяжения с величиной F: $T = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F \Rightarrow \dfrac{F}{T} = 1 + \dfrac{m_1}{m_2}$. Из условия видно, что сила величиной 15 Н создает натяжение 9 Н, и поэтому $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{2}{3}$. Значит, $m_2 = \dfrac{3}{2} m_1 = 1200$ г.

Ответ: 1,2.

Задача 2 (2 балла) [центростремительное ускорение, круговые орбиты, уравнение движения]

Спутник, вращавшийся вокруг Земли по круговой орбите, в результате маневра перешел на другую круговую орбиту. При этом его ускорение увеличилось. Каким образом при этом изменились период обращения спутника, модуль скорости спутника, его потенциальная энергия в поле тяжести Земли? Считать, что сопротивление среды на высоте орбит спутника пренебрежимо мало, а Земля практически неотличима от однородного шара. Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличится
2) уменьшится
3) не изменится

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться. Ответом является нужная последовательность цифр.

период обращения	модуль скорости	потенциальная энергия

Подсказка 1: ускорение спутника – это его центростремительное ускорение, и оно равно ускорению свободного падения в точках орбиты спутника.

Подсказка 2: ускорение связано со скоростью и радиусом орбиты соотношениями $a = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{GM}{r^2}$.

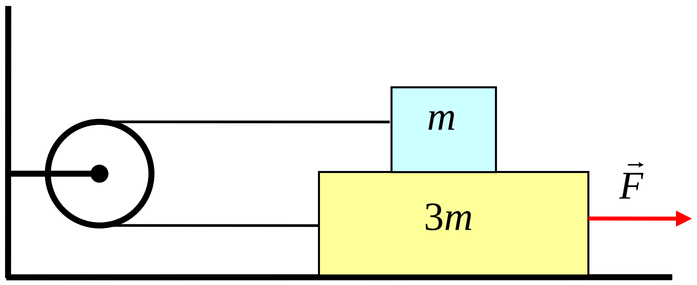
Решение:

Ускорение спутника на круговой орбите – это его центростремительное ускорение, и оно равно ускорению свободного падения в точках орбиты спутника, то есть $a=\frac{v^2}{r}=\frac{GM}{r^2}$ (здесь M - масса Земли, r и v - радиус орбиты и скорость спутника). Таким образом, увеличение ускорения означает уменьшение радиуса орбиты спутника. Поскольку из уравнения движения следует связь скорости и радиуса орбиты: $m\frac{v^2}{R}=\frac{GmM}{R^2}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$, то можно установить, что скорость спутника при этом увеличивается. Период обращения $T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}R^{3/2}$ при уменьшении радиуса уменьшается, а потенциальная энергия $a=\frac{v^2}{r}=\frac{GM}{r^2}$ также уменьшается (это ясно и просто из тех соображений, что при опускании тела в поле тяжести силы тяготения совершают положительную работу).

Ответ: 212.

Задача 3 (4 балла) [уравнения движения, кинематическая связь, равноускоренное движение]

Два бруска с массами $m=250$ г и $3m$, соединенные перекинутой через идеальный блок невесомой нерастяжимой нитью, покоятся на горизонтальной поверхности (см. рисунок) Участки нити, не лежащие на блоке, горизонтальны. Известно, что коэффициенты трения нижнего бруска о плоскость и между брусками одинаковы и равны $\mu=0{,}5$. С каким ускорением начнет двигаться нижний брусок, если потянуть его вдоль поверхности от блока с силой $F=10$ Н? Ускорение свободного падения считать равным $g=10$ м/с^2, ответ выразить в м/с^2.



Подсказка 1: если бруски движутся, силы трения равны своему максимальному значению: сила трения между брусками равна $F_1=\mu mg$, а сила трения между нижним бруском и плоскостью $F_2=\mu(m+3m)g=4\mu mg$.

Подсказка 2: следует записать уравнения движения брусков в проекции на горизонтальную ось и дополнить их уравнением связи, следующим из условия нерастяжимости нити.

Подсказка 3: Так как при любом смещении нижнего бруска при натянутой нити верхний смещается точно на такое же расстояние в противоположную сторону, то ускорения верхнего (a) и нижнего (A) брусков в проекции на горизонтальную ось связаны соотношением: $a=-A$.

Решение:

Если сила F достаточна для того, чтобы привести бруски в движение, силы трения будут равны своему максимальному значению: сила трения между брусками равна $F_1=\mu mg$, а сила трения между нижним бруском и плоскостью $F_2=\mu(m+3m)g=4\mu mg$. Запишем уравнения движения брусков в проекции на горизонтальную ось:

$$\begin{cases} ma=\mu mg-T \\ 3mA=F-T-4\mu mg-\mu mg \end{cases}$$

(здесь A и a – ускорения нижнего и верхнего брусков, а T – сила натяжения нити). Кроме того, поскольку нить нерастяжима, ускорения брусков связаны уравнением кинематической связи $a = -A$. Подставляя его в первое из уравнений движения, выразим силу натяжения через A: $T = \mu m g + m A$. После этого из второго уравнения находим

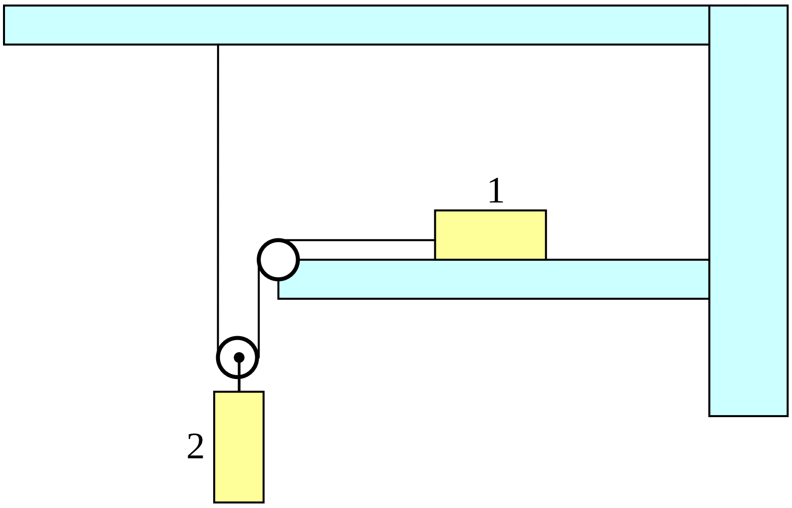
$$A = \frac{F - 6\mu m g}{4m}.$$

При $F < 6\mu m g$ эта формула дает отрицательные значения ускорения, что физически бессмысленно. Очевидно, это означает, что при такой величине силы бруски не придут в движение из-за трения. В нашем случае $F > 6\mu m g = 7{,}5$ Н. Поэтому ускорение нижнего бруска $A = \dfrac{F - 6\mu m g}{4m} = 2{,}5$ м/с^2.

Ответ: 2,5.

Задача 4 (4 балла) [уравнения движения, кинематическая связь, подвижный блок, неподвижный блок, равноускоренное движение]

Механическая система состоит из двух одинаковых грузов, двух легких гладких блоков и легкой нерастяжимой нити. Грузы удерживают в положении, показанном на рисунке. Поверхность, на которую помещен груз 1, горизонтальна, коэффициент трения между грузом и поверхностью $\mu = 0{,}3$. Участки нити, не лежащие на блоках, ориентированы горизонтально либо вертикально. Найти ускорение груза 1. В ответе указать отношение $\dfrac{a_1}{g}$ в виде десятичной дроби.



Подсказка 1: следует записать уравнения движения грузов (для груза 1 – в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 – в проекции на вертикальную ось) и дополнить их уравнением связи ускорений, следующим из условия нерастяжимости нити.

Подсказка 2: при натянутой нити смещение груза 1 «влево» на расстояние Δx_1 приводит к тому, что длина петли нити, в которой находится подвижный блок, увеличивается ровно на Δx_1, и поэтому груз 2 смещается вниз на расстояние $\Delta x_2 = \dfrac{\Delta x_1}{2}$.

Подсказка 3: ускорения грузов связаны соотношением $a_2 = \dfrac{a_1}{2}$.

Решение:

Обозначим T величину силы натяжения нити, которую можно считать одинаковой во всех точках нити. Запишем уравнения движения грузов: для груза 1 – в проекции на горизонтальную ось, для груза 2 – в проекции на вертикальную ось:

$$\begin{cases} ma_1 = T - \mu mg \\ ma_2 = mg - 2T \end{cases}.$$

Заметим, что при смещении груза 1 «влево» на расстояние Δx_1 длина петли нити, в которой находится подвижный блок, увеличивается ровно на Δx_1. Поскольку это удлинение распределится поровну между двумя сторонами петли, то при натянутой нерастяжимой нити груз 2 сместится вниз на расстояние $\Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{2}$. Поэтому ускорения грузов связаны соотношением $a_2 = \frac{a_1}{2}$. Выражая из первого уравнения движения T и подставляя полученное выражение во второе вместе с уравнением связи, получаем:

$$m\frac{a_1}{2} = mg - 2(ma_1 + \mu mg) \Rightarrow a_1 = \frac{2(1-2\mu)}{5} g.$$

Таким образом, $\frac{a_1}{g} = \frac{2(1-2\mu)}{5} = 0{,}16$. Полезно самостоятельно убедится, что при таком ускорении нить действительно натянута, то есть $T > 0$.

Ответ: 0,16.

Задача 5 (5 баллов) [уравнение движения, равноускоренное движение, сила трения]

Ровная длинная доска лежала на горизонтальной шероховатой поверхности, а на ней покоился небольшой кубик, масса которого в три раза меньше массы доски. По кубику нанесли резкий удар, сообщив ему скорость $v_0 = 2{,}6$ м/с, направленную строго горизонтально вдоль доски. Какое время понадобится, чтобы движение в этой системе прекратилось? Кубик остается на доске вплоть до остановки, коэффициент трения между доской и поверхностью $\mu_1 = 0{,}1$, а коэффициент трения между кубиком и доской $\mu_2 = 0{,}6$. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2, ответ выразить в миллисекундах.

Подсказка 1: после удара кубик скользит по доске и тормозится силой трения скольжения $F_{тр2} = \mu_2 mg$ (m – масса кубика), и его ускорение $a_2 = -\mu_2 g$.

Подсказка 2: сила трения, с которой кубик действует на доску, больше максимальной силы трения покоя, действующей на доску со стороны поверхности, поэтому доска будет скользить по поверхности с ускорением $a_1 = \frac{F_{тр2} - F_{тр1}}{4m} = \frac{\mu_2 - 4\mu_1}{4} g$.

Подсказка 3: когда скорости кубика и доски сравняются, их относительное движение прекратится, но они еще будут после этого двигаться вместе до полной остановки.

Решение:

Отметим, что, поскольку все движения горизонтальны, для проекций сил на вертикальную ось выполняются условия равновесия, поэтому сила нормальной реакции доски, действующая на кубик, $N_2 = mg$, и сила нормальной реакции поверхности, действующая на доску, $N_1 = (m+M)g = 4mg$ (здесь m – масса кубика, а $M = 3m$ – масса доски). Сразу после удара кубик скользит по доске и тормозится силой трения скольжения $F_{тр2} = \mu_2 mg$. Таким образом, из второго закона Ньютона находим, что ускорение кубика в проекции на горизонтальную ось x, направленную вдоль линии удара, $a_2 = -\mu_2 g$, и закон изменения его скорости $v_2(t) = v_0 - \mu_2 gt$. «Ответная» сила трения, с которой кубик действует на доску, сдвигает доску вдоль линии удара. Поскольку эта сила больше максимальной силы трения покоя для доски

$$F_{тр2} = \mu_2 mg = 0{,}6mg > F_{тр1}^{(\max)} = \mu_1(m+M)g = 4\mu_1 mg = 0{,}4mg,$$

то доска начнет скользить по поверхности с ускорением $a_1 = \dfrac{F_{тр2} - F_{тр1}}{4m} = \dfrac{\mu_2 - 4\mu_1}{4} g$, и ее скорость будет расти по закону $v_1(t) = \dfrac{\mu_2 - 4\mu_1}{4} gt$. Когда скорости кубика и доски сравняются, их относительное движение прекратится. Это произойдет в момент времени t_1:

$$\frac{\mu_2 - 4\mu_1}{4} g t_1 = v_0 - \mu_2 g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{5\mu_2 - 4\mu_1}{4} \frac{v_0}{g} = 0{,}169 \text{ с},$$

и в этот момент доска и кубик будут двигаться с общей скоростью $v = \dfrac{\mu_2 - 4\mu_1}{5\mu_2 - 4\mu_1} v_0$. Далее они будут двигаться вместе под действием силы трения со стороны поверхности с ускорением $a = -\dfrac{\mu_1 4mg}{4m} = -\mu_1 g$, и поэтому для остановки им потребуется время $t_2 = \dfrac{v}{a} = \dfrac{\mu_2 - 4\mu_1}{5\mu_2 - 4\mu_1} \dfrac{v_0}{\mu_1 g} = 0{,}2$ с. Итак, полное время торможения $t = t_1 + t_2 = 0{,}369$ с.
Ответ: 369.

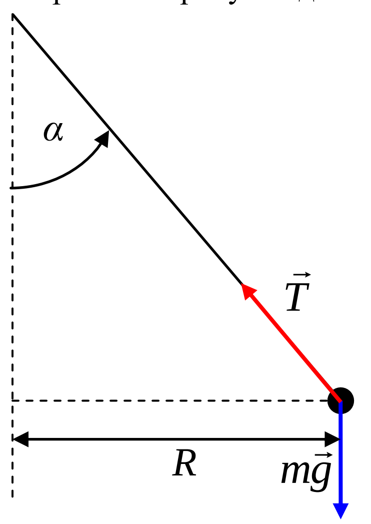
Задача 6 (3 балла) [движение по окружности, центростремительное ускорение, уравнение движения]
Небольшой массивный шарик, прикрепленный к концу легкой нерастяжимой нити, вращается вокруг вертикальной оси так, что нить отклоняется от вертикали на угол $\alpha = 60°$. Период вращения шарика $T \approx 0{,}628$ с. Найти длину нити. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Ответ выразить в сантиметрах, округлив до целых.
Подсказка 1: на шарик действуют сила натяжения нити и сила тяжести.
Подсказка 2: следует записать уравнение движения шарика для центростремительного ускорения вместе с условием отсутствия движения шарика по вертикали.
Подсказка 3: эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{R} = T\sin\alpha \\ T\cos\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

(где радиус описываемой шариком окружности $R = L\sin\alpha$, а T - сила натяжения нити), и из нее можно найти скорость движения шарика v.

Решение:

Изобразим на рисунке действующие на шарик силы: силу натяжения нити и силу тяжести.



Запишем уравнение движения шарика для центростремительного ускорения вместе с условием отсутствия движения шарика по вертикали:

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{R} = T\sin(\alpha) \\ T\cos(\alpha) - mg = 0 \end{cases}.$$

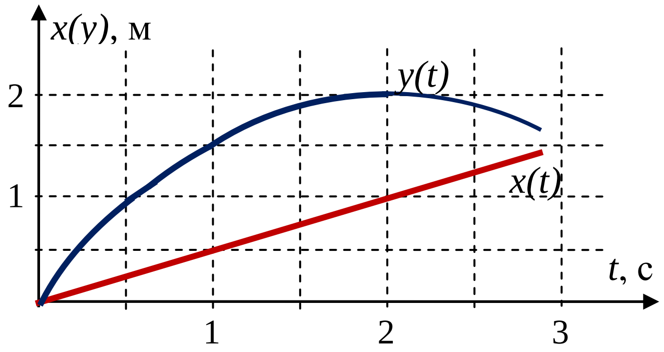
Здесь R – радиус траектории шарика, который определяется из геометрических соображений: $R = L\sin(\alpha)$. Выражая силу натяжения нити из второго уравнения и подставляя полученное значение в первое, получаем: $v^2 = \dfrac{gL\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Следовательно, период вращения

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos(\alpha)}{g}} \Rightarrow L = \frac{gT^2}{(2\pi)^2\cos(\alpha)} \approx 20\,\text{см}.$$

Ответ: 20.

Задача 7 (4 балла) [равномерное движение, равноускоренное движение, уравнение движения]

Тело массой $m = 1\,\text{кг}$ движется в плоскости (xy) под действием одной постоянной силы, параллельной этой плоскости. На графике показаны зависимости координат тела от времени.



Выберите два верных утверждения на основании этого графика.

1) Величина перемещения тела от момента времени $t = 0\,\text{с}$ до $t = 4\,\text{с}$ при продолжении этого движения будет равна 2 м.
2) Проекция скорости тела на ось y постоянна.
3) Сила, действующая на тело, направлена под углом $60°$ к оси x.
4) Величина силы, действующей на тело, равна 1 Н.
5) В момент времени $t = 0\,\text{с}$ скорость тела направлена под углом $60°$ к оси x.

Таблица для ответа:

В ответе укажите получившуюся последовательность цифр.

Подсказка 1: Под действием постоянной силы тело движется равноускоренно.

Подсказка 2: По оси x тело движется равномерно (график $x(t)$ – линейный).

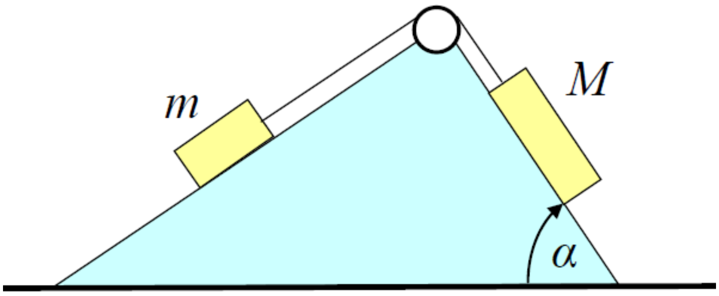
Подсказка 3: При «обратном» движении от точки с $y = 2\,\text{м}$ тело пройдет вдоль оси y расстояние 2 м за 2 с, двигаясь с постоянным ускорением из состояния покоя.

Решение:

Под действием постоянной силы тело движется равноускоренно. При этом по оси x тело движется равномерно (график $x(t)$ – линейный). Значит, ускорение тела направлено по оси y. Сразу видно, что **утверждение 2 – неверно**. Направление ускорения совпадает с направлением силы, поэтому сила также направлена по y, и **утверждение 3 – неверно**. Легко проверить утверждение 1: продолжая график $x(t)$, обнаружим, что $x(4c) = 2\,\text{м}$. Используя симметричность параболы, догадываемся, что $y(4c) = 0\,\text{м}$. Таким образом, величина перемещения тела будет равна как раз 2 м, то есть **утверждение 1 – верно**.

Заметим также, что при «обратном» движении от точки с $y = 2$ м тело пройдет вдоль оси y расстояние $s = 2$ м за $\tau = 2$ с, двигаясь с постоянным ускорением из состояния покоя. Так как $s = \dfrac{a\tau^2}{2}$, то величина ускорения $a = 1$ м/с^2. С учетом этого величина силы, вызвавшей это ускорение, $F = ma = 1$ Н, и **утверждение 4 – верно**. Итак, мы нашли оба верных утверждения, и анализировать справедливость утверждения 5 не нужно. Оно действительно неверно, но для того, чтобы это установить, нужно найти значения проекций скоростей в момент времени $t = 0$ с. Как видно, $v_x = const = 0{,}5$ м/с. Вторую проекцию можно найти, построив касательную к графику $y(t)$ в этот момент времени. Тогда получаем $v_y(0) = 2$ м/с. Это означает, что угол между вектором скорости и осью x равен $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{v_y(0)}{v_x}\right) = \mathrm{arctg}(4)$, то есть явно не равняется $60°$. Итак, действительно – **утверждение 5 – неверно**.
Ответ: 14.

Задача 8 (4 балла) [подвижный блок, неподвижный блок, условие равновесия]
Два груза с массами $M = 0{,}3$ кг и m связаны легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через легкий блок (см. рисунок) и помещены на наклонные шероховатые поверхности клина. Нить скользит по блоку без трения. Угол при вершине клина прямой, а угол наклона к горизонту плоскости, на которой находится груз массы M, равен $\alpha = 60°$. Коэффициенты трения между грузами и поверхностями одинаковы и равны $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$. Найдите минимальное значение массы m, при котором грузы могут находиться в состоянии покоя. Ответ запишите в граммах, округлив до целого значения.



Подсказка 1: минимальное значение m соответствует ситуации, когда груз M начинает скользить вниз: следует составить схематический рисунок с указанием всех сил, действующих на бруски в этой ситуации.
Подсказка 2: силы трения покоя при этом направлены против начинающихся движений и достигают своих максимальных значений, то есть $F_{тр1,2} = \mu N_{1,2}$.
Подсказка 3: условия равновесия грузов: $T + F_{тр1} - Mg\sin\alpha = 0$, $N_1 - Mg\cos\alpha = 0$ и $T - F_{тр2} - mg\sin\beta = 0$, $N_2 - mg\cos\beta = 0$.

Решение:

Изобразим силы, действующие на грузы, на рисунке 2, и укажем там же направления выбранных координатных осей.
<место для рисунка 2>
Минимальное значение m соответствует ситуации, когда груз M начинает скользить вниз (в соответствии с этим соображением и выбраны направления сил трения на рисунке), а силы трения покоя достигают своих максимальных значений: $F_{тр1,2} = \mu N_{1,2}$.Запишем условия равновесия для обоих грузов: для груза M

$$T + F_{тр1} - Mg\sin\alpha = 0,\ N_1 - Mg\cos\alpha = 0.$$

Отсюда находим, что $T = Mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Аналогично для груза m (угол наклона к горизонту грани, на которой находится этот груз, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$)

$$T - F_{mp2} - mg\sin\beta = 0,\ N_2 - mg\cos\beta = 0.$$

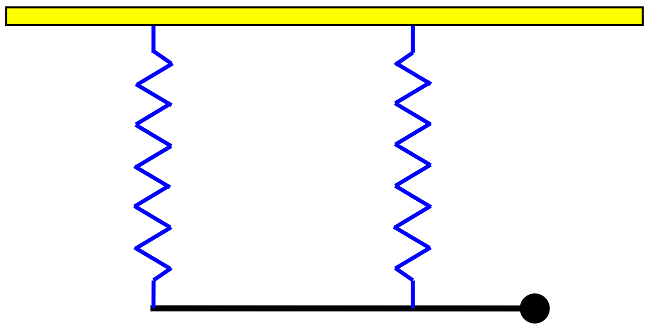
Значит, $T = mg(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$. Сравнивая два полученных выражения, находим:

$$m = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} M = \frac{M}{\sqrt{3}} \approx 0{,}1732 \text{ кг}.$$

Ответ: 173.

Задача 9 (4 балла) [условие равновесия сил, правило моментов, закон Гука]

Однородный тонкий стержень подвешен на двух одинаковых очень жестких пружинах, одна из которых прикреплена к его левому концу, а другая – к точке, находящейся на расстоянии трети длины стержня от левого (см. рисунок). К правому концу стержня прикрепили маленький груз, масса которого равна массе стержня. Система находится в равновесии, причем оси обеих пружин при этом вертикальны. Во сколько раз отличаются величины деформаций первой и второй пружины?



Подсказка 1: отношение величин деформаций пружин равно отношению величин сил упругости: $\frac{|\Delta l_2|}{|\Delta l_1|} = \left|\frac{F_2}{F_1}\right|$.

Подсказка 2: все силы, действующие на стержень: силы упругости пружин, сила тяжести стержня и вес груза – направлены вертикально, и для решения достаточно записать условие равновесия сил в проекции на вертикальную ось и правило моментов.

Подсказка 3: правило моментов относительно центра масс стержня имеет вид:

$$mg\frac{L}{2} + F_1\frac{L}{2} - F_2\frac{L}{6} = 0.$$

Решение:

Будем считать, что деформации пружин малы, и к ним применим закон Гука. Тогда, поскольку пружины одинаковы, то отношение величин деформаций равно отношению величин сил упругости: $\frac{|\Delta l_2|}{|\Delta l_1|} = \left|\frac{F_2}{F_1}\right|$. Поскольку все силы, действующие на стержень: силы упругости пружин, сила тяжести стержня и вес груза – направлены вертикально, то условие равновесия сил в проекции на ось, направленную вертикально вверх, имеет вид:

$$F_1 + F_2 = 2mg.$$

Теперь запишем правило моментов относительно центра масс стержня (L – длина стержня):

$$mg\frac{L}{2} + F_1\frac{L}{2} - F_2\frac{L}{6} = 0 \Rightarrow F_2 - 3F_1 = 3mg.$$

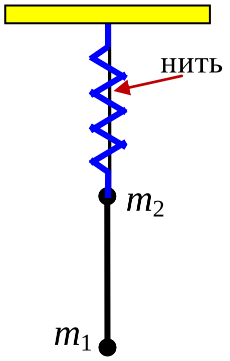
Решая полученную систему относительно сил натяжения, находим: $F_1 = -\frac{1}{4}mg$, $F_2 = \frac{9}{4}mg$.

Как видно, первая пружина сжата (ее сила упругости направлена вниз), а вторая растянута, причем $\frac{|\Delta l_2|}{|\Delta l_1|} = 9$.

Ответ: 9.

Задача 10 (4 балла) [условие равновесия сил, уравнение движения, закон Гука]

Материальные точки с массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г прикреплены к невесомому стержню, как показано на рисунке. К точке m_2 прикреплена невесомая пружина жесткостью $k = 30$ Н/м, верхний конец которой закреплен. Длина пружины в нерастянутом состоянии $l_0 = 20$ см. В начальный момент концы пружины связаны нитью длиной $l = 10$ см. Определите силу реакции стержня, действующую на массу m_1 сразу после пережигания нити. Ответ укажите в Ньютонах



Подсказка 1: «Сразу после пережигания нити» тела не успеют сдвинуться, и пружина не успеет изменить свою длину.

Подсказка 2: У системы тел (две точки + стержень) сразу появится ускорение, созданное силами тяжести и силой упругости пружины.

Подсказка 3: У массы m_1 это ускорение создается силой реакции стержня и силой тяжести.

Решение:

«Сразу после пережигания нити» тела не успеют сдвинуться, и пружина не успеет изменить свою длину. Но у системы тел (две точки + стержень) сразу появится ускорение, созданное силами тяжести и силой упругости пружины, и величина этого ускорения определяется на основании второго закона Ньютона: $a = \dfrac{m_1 g + m_2 g + k(l_0 - l)}{m_1 + m_2} = g + \dfrac{k(l_0 - l)}{m_1 + m_2} = 20$ м/с^2. У массы m_1 это ускорение создается силой реакции стержня F и силой тяжести. Значит, $m_1 a = F + m_1 g$. Подставляя сюда найденное ускорение, находим: $F = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} k(l_0 - l) = 1$ Н.

Ответ: 1.