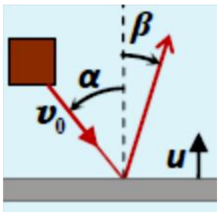
Задание 1: «Удар о стену».



Вопрос: Однородный кубик, скользивший без вращения по гладкому горизонтальному льду со скоростью v_0, сталкивается «плашмя» с очень массивной плитой, движущейся поступательно перпендикулярно своей поверхности со скоростью $u = v_0/2$. Скорость кубика до удара направлена под углом $\alpha = 40°$ к нормали к плите (см. рисунок). Плита гладкая, удар упругий. Чему будет равен угол отражения β?

Ответ на вопрос: Если перейти в СО, связанную с движущейся плитой (в которой скорость кубика в проекции на ось x, направленную вдоль плиты, равна $v'_{0x} = v_0 \sin(\alpha)$, а ее проекция на ось y, направленную перпендикулярно плите, равна $v'_{0y} = -u - v_0 \cos(\alpha)$), то мы понимаем, что при упругом ударе о гладкую плиту первая проекция сохраняется, а вторая просто меняет знак. Вернемся в исходную СО и определим проекции скорости кубика на эти оси после удара: $v_x = v_0 \sin(\alpha)$ и $v_y = 2u + v_0 \cos(\alpha) = v_0[\cos(\alpha)+1]$. Следовательно,

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} = 20°.$$

Критерии проверки вопроса:

№	действие	балл
1	Проведен правильный анализ соударения (с переходом в удобную СО или в другой СО)	2
2	Правильно найдена x-компонента конечной скорости кубика.	2
3	Правильно найдена y-компонента конечной скорости кубика.	2
4	Записана правильная формула для угла отражения.	2
5	Получен правильный численный ответ $\beta = 20°$.	2
Всего		**10**

Задача: Во втором опыте плиту заменили на столь же массивную, но шероховатую. Ее нормальные деформации остались упругими (то есть при нормальном падении удар остался бы упругим). Теперь угол падения кубика $\alpha = \arcsin(0{,}8) \approx 53{,}13°$, а скорость движения плиты $u = v_0/5$. При этом кубик отразился в направлении, перпендикулярном направлению его движения до удара. Найдите коэффициент трения между кубиком и плитой. При какой величине этого коэффициента угол отражения станет равен нулю?

Решение задачи: Отметим, что теперь мы знаем угол отражения: из условия ясно, что $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, то есть $\sin(\beta) = \cos(\alpha) = 0{,}6$ и $\cos(\beta) = \sin(\alpha) = 0{,}8$. Рассмотрим взаимодействие кубика с плитой. Будем считать деформации плиты малыми – это сильно упрощает дело. Тогда она не позволит кубику в процессе удара начать вращаться, так что и после удара он будет двигаться поступательно. На кубик будут действовать сила нормальной реакции и сила трения, которые при «мгновенном» ударе становятся «очень большими». Снова перейдем в СО, связанную с плитой. По условию, действие силы нормальной реакции совпадает с ее действием при упругом ударе, поэтому проекция скорости кубика на ось y, как и в примере просто меняет знак, и изменение импульса тела в проекции на эту ось в этой СО

$$mv'_y - [-mu - mv_0 \cos(\alpha)] = 2m[u + v_0 \cos(\alpha)] = N\Delta t,$$

где Δt - малое время удара. Мы знаем, что в процессе удара сила трения не успевает остановить проскальзывание (угол β больше нуля). Значит, в течение всего времени Δt эта сила является силой трения скольжения, и $F_{тр} = \mu N$. Тогда изменение импульса кубика в проекции на ось x (одинаковое в обеих СО) равно $mv_x - mv_0 \sin(\alpha) = -\mu N\Delta t = -2\mu m[u + v_0 \cos(\alpha)\}$. В этом случае проекция скорости кубика на ось x после удара $v_x = v_0 \sin(\alpha) - 2\mu[u + v_0 \cos(\alpha)]$, а $v_y = 2u + v_0 \cos(\alpha)$. Значит, угол отражения удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{tg}(\beta) = \frac{3}{4} = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_0 \sin(\alpha) - 2\mu[u + v_0 \cos(\alpha)]}{2u + v_0 \cos(\alpha)} \Rightarrow \mu = \frac{v_0 \sin(\alpha) - \mathrm{tg}(\beta)[2u + v_0 \cos(\alpha)]}{2[u + v_0 \cos(\alpha)]} = \frac{1}{32} \approx 0{,}031.$$

Угол отражения равен нулю, если сила трения за время удара полностью останавливает проскальзывание кубика по плите, то есть если $v_x = v_0 \sin(\alpha) - 2\mu[u + v_0 \cos(\alpha)] = 0$. Таким образом, $\beta = 0$ при

$$\mu = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{2[u + v_0 \cos(\alpha)]} = \frac{1}{2}.$$

Ясно, что такой же ответ можно получить и из общей формулы при подстановке нулевого β, и то, что при больших μ угол отражения тоже равен нулю.

ОТВЕТЫ: Коэффициент трения $\mu = \frac{v_0 \sin(\alpha) - \mathrm{tg}(\beta)[2u + v_0 \cos(\alpha)]}{2[u + v_0 \cos(\alpha)]} = \frac{1}{32} \approx 0{,}031$, при $\mu \geq \frac{v_0 \sin(\alpha)}{2[u + v_0 \cos(\alpha)]} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ кубик будет отражаться в направлении, перпендикулярном плите.

Критерии проверки задачи:

№	действие	балл
1	Указано, что проекция скорости кубика на ось y просто меняет знак.	2
2	Правильно определен импульс силы нормальной реакции через v_0 и α.	2
3	Указано, что за время удара скольжение не прекратилось.	1
4	Это утверждение корректно обосновано.	1
5	Правильно найдена y-компонента конечной скорости кубика.	1
6	Правильно найдена x-компонента конечной скорости кубика.	2
7	Правильно (с ошибкой не более 0,003) определено численное значение коэффициент трения.	2
8	Указано, что угол отражения равен нулю, если сила трения за время удара полностью останавливает проскальзывание кубика по плите.	2
9	Правильно найдены значения μ, при которых $\beta = 0$	2
Всего		**15**

Задание 2: «Эффективность лебедки».

Вопрос: Ящики с грузом постоянной массы поднимают по наклонной плоскости с постоянной скоростью с помощью лебедки и легкого нерастяжимого троса. Двигатель лебедки подключен к аккумулятору, создающему постоянное напряжение, его статор – постоянный магнит, сопротивление цепи ротора можно считать постоянным. Известно, что сила натяжения троса, возникающая за счет работы лебедки, прямо пропорциональна силе тока, текущего в цепи ротора ее двигателя. Какой кривой является график зависимости полезной мощности лебедки от массы ящика с грузом? Ответ объяснить.

Ответ на вопрос: В установившемся режиме сила натяжения троса равна по величине тормозящей силе $T = mg[\sin(\alpha) + \mu \cdot \cos(\alpha)] \equiv ma$, и поэтому $P_{\text{пол}} = ma \cdot v$, где v – скорость подъема груза. Кроме того, согласно условию, $ma = k \cdot I$, где k – некоторый постоянный коэффициент. Следовательно,

$$P_{\text{пол}} = U \cdot I - I^2 R = \frac{Ua}{k} m - \frac{Ra^2}{k^2} m^2.$$

Ясно, что графиком этой функции является парабола.

Критерии проверки вопроса:

№	действие	балл
1	Указано, что сила натяжения троса пропорциональна массе ящика.	2
2	Указано, что сила тока в обмотке ротора пропорциональна массе ящика.	2
3	Полезная мощность записана как разность мощностей работы источника и джоулевых потерь.	2
4	Записано правильное выражение связи мощности с массой ящика.	2
5	Дан правильный итоговый ответ (парабола).	2
Всего		**10**

Задача: Напряжение, поддерживаемое аккумулятором, равно $U = 200$ В, сопротивление цепи обмотки ротора $R = 4$ Ом. При этом лебедка не может поднимать по плоскости груз массой более $m_{max} = 500$ кг. При какой массе груза m_1 полезная мощность лебедки будет максимально возможной? Чему она равна? Пусть известно, что ящик с массой m_1 лебедка поднимает вдоль плоскости со скоростью 1,25 м/с. С какой скоростью она будет поднимать вдоль плоскости ящик с массой на 20 % больше, чем m_1?

Решение задачи: Согласно полученной формуле, полезная мощность обращается в ноль при $m = 0$ (холостой ход) и при $m_{max} = \frac{kU}{Ra}$. Второе значение и есть максимальная масса, выше которой лебедка не сможет поднимать ящик. Максимум параболы (графика мощности) расположен точно посередине между этими значениями, то есть он достигается при $m_1 = \frac{1}{2}m_{max} = 250$ кг. Кроме того, $m_1 = \frac{kU}{2Rg}$.

Подставив это значение в формулу для полезной мощности, находим, что $P_{\max} = \dfrac{U^2}{4R} = 2500$ Вт. Кроме того, можно выразить $k = \frac{2Rg}{U}m_1$. Тогда выражение для полезной мощности можно переписать в виде

$$P_{\text{пол}} = \frac{U^2}{4R}\left\{2\frac{m}{m_1} - \left(\frac{m}{m_1}\right)^2\right\}.$$

Следовательно, скорость подъема этого груза

$$v = \frac{P_{\text{пол}}}{ma} = \frac{U^2}{4Rma}\left\{2\frac{m}{m_1} - \left(\frac{m}{m_1}\right)^2\right\},$$

и при $m = m_1$ это выражение дает $v_1 = \frac{U^2}{4Rma} = 1{,}25$ м/с. Значит,

$$v(m) = v_1\left\{2\frac{m}{m_1} - \left(\frac{m}{m_1}\right)^2\right\}.$$

При $m = 1{,}2 \cdot m_1$ получаем $v = \frac{24}{25}v_1 = 1{,}2$ м/с.

ОТВЕТЫ: Полезная мощность лебедки максимальна при $m_1 = 250$ кг и равна $P_{\max} = \dfrac{U^2}{4R} = 2500$ Вт, при массе ящика $m = 1{,}2 \cdot m_1$ установившаяся скорость $v = v_1\left\{2\frac{m}{m_1} - \left(\frac{m}{m_1}\right)^2\right\} = 1{,}2$ м/с.

Критерии проверки задачи:

№	действие	балл
1	Найдены значения массы, при которых полезная мощность обращается в ноль.	2
2	Указано, что большее из них и есть m_{max}	2
3	Объяснено, что максимум мощности отвечает $m_1 = \frac{1}{2}m_{max}$	1
4	Найдено правильное численное значение m_1	1
5	Найдено правильное численное значение P_{max}	2
6	Записано правильная формула для связи скорости с массой.	3
7	Эта формула приведена к виду, эквивалентному $v(m) = v_1\left\{2\frac{m}{m_1} - \left(\frac{m}{m_1}\right)^2\right\}$.	2
8	Получен правильный численный ответ для скорости.	2
Всего		**15**

Задание 3: «Неидеальная катушка».

Вопрос: На участке цепи переменного тока, через которую течет ток с амплитудой I_m, амплитуда колебаний напряжения равна U_m, а сдвиг фаз между током и напряжением равен φ. Какую среднюю мощность потребляет этот участок от цепи? Ответ объяснить.

Ответ на вопрос: Мгновенное значение потребляемой мощности для этой цепи равно

$$P(t) = U_m \cdot \cos(\omega t) \cdot I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) = U_m I_m \cdot [\cos^2(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega t) \cdot \sin(\varphi)].$$

Среднее значение любой гармонической функции по периоду равно нулю, а среднее значение ее квадрата равно ½. Таким образом, средняя мощность $P_{cp} = \frac{1}{2}U_m I_m \cdot \cos(\varphi)$.

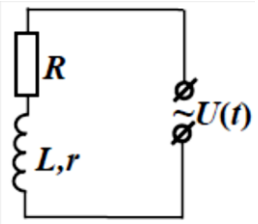
Критерии проверки вопроса:

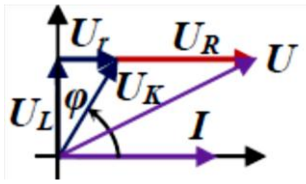
№	действие	балл
1	Записано выражение для мгновенной мощности потребления.	2
2	Это выражение преобразовано к виду, состоящему из слагаемых с гармонической	3

	зависимостью от времени и слагаемых с зависимостью в виде квадрата гармонической функции.	
3	Правильно описано усреднение таких слагаемых.	2
4	Записан правильный итоговый ответ.	3
Всего		**10**

Задача: К бытовой сети переменного тока с действующим значением напряжения 220 В подключена цепь из последовательно соединенных катушки и резистора. Сопротивление резистора R = 21 Ом, индуктивность катушки и ее омическое сопротивление неизвестны. Напряжения в этой цепи были промерены вольтметром, который можно считать идеальным: напряжение на выходе источника 220 В, на резисторе 120 В, на катушке 160 В. Найдите среднюю мощность, потребляемую катушкой.

Решение задачи: Изобразим схему и фазовую диаграмму описанного подключения. Мощность тепловыделения практически равна потребляемой мощности (излучением пренебрегаем), то есть $P_K = I_K U_K \cdot \cos(\varphi)$. Здесь I_K – действующее значение силы тока через катушку, U – входного напряжения, а φ – сдвиг фаз между током и напряжением на катушке. С другой стороны, напряжение на выходе источника в любой момент времени равна сумме напряжений на резисторе и катушке: $U(t) = U_R(t) + U_K(t)$. Соответственно, исходя из векторной диаграммы (из теоремы косинусов) видим, что для действующих значений $U^2 = U_R^2 + U_K^2 + 2U_R U_K \cdot \cos(\varphi)$. Выражая из этого соотношения





$$\cos(\varphi) = \frac{U^2 - U_R^2 - U_K^2}{2U_R U_K} = \frac{U^2 - U_R^2 - U_K^2}{2RI_K U_K},$$

(мы учли, что $U_R = RI_R = RI_K$) и подставляя его в первое уравнение, получаем для потребляемой мощности

$$P_K = \frac{U^2 - U_R^2 - U_K^2}{2R} = 200 \text{ Вт}.$$

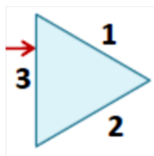
ОТВЕТ: Мощность, потребляемая катушкой в этой цепи $P_K = \frac{U^2 - U_R^2 - U_K^2}{2R} = 200$ Вт.

Критерии проверки задачи:

№	действие	балл
1	Выражение для потребляемой мощности записано через действующие значения	1
2	Построена векторная диаграмма для сложения колебаний напряжения на катушке и резисторе	5
3	Записано выражение, эквивалентное $U^2 = U_R^2 + U_K^2 + 2U_R U_K \cdot \cos(\varphi)$.	3
4	Из этого выражения найден $\cos(\varphi)$.	2
5	Получена правильная формула для P_K через данные задачи.	2
6	Получен правильный численный ответ для P_K.	2
Всего		**15**

Задание 4: «Полное внутреннее отражение».

Вопрос: Тонкий световой пучок параллельных лучей падает нормально на грань прозрачной призмы, сечением которой является правильный треугольник. Показатель преломления ее материала n = 1,4. Через какую из ее граней пучок впервые выйдет из призмы наружу?



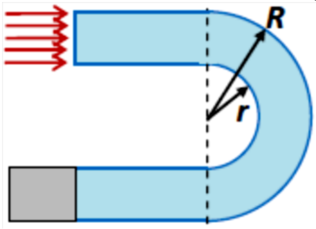
Ответ на вопрос: На грани 3 при первом падении пучок не преломляется, на грань 1 изнутри пучок падает под углом 60°. Поскольку $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{1,4}$, то на этой грани происходит полное внутреннее отражение, а затем на грань 2 пучок падает нормально и лучи пучка выходят из призмы наружу. Так что ответ на вопрос – через грань 2.

Критерии проверки вопроса:

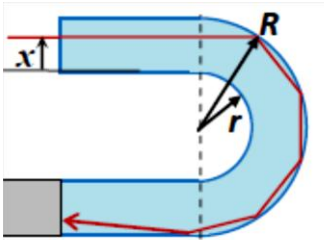
№	действие	балл
1	Указано (используется в решении), что на грани 3 при первом падении пучок не преломляется.	1
2	Указано, что угол падения на грань 1 равен 60°.	1
3	Показано, что на грани 1 происходит полное внутреннее отражение.	4
4	Выяснено, что на грань 2 пучок падает нормально.	2

5	Дан правильный итоговый ответ.	2
Всего		**10**

Задача: Световое излучение – это разновидность *электромагнитных волн*, причем разные цвета отличаются друг от друга *длиной волны* λ. Планарный световод изготовлен из однородной плоской прозрачной пластины, изогнутой так, как показано на рисунке. Поверхности зоны изгиба являются половинами поверхностей цилиндров, радиусы которых удовлетворяют соотношению $R = 2r$. На торец световода падает однородный (по сечению) параллельный пучок световых лучей общей мощностью 15 Вт, являющийся смесью излучений с длинами волн от 400 нм до 700 нм. Мощность излучения распределена по спектру равномерно (то есть на одинаковые диапазоны длины волны приходятся одинаковые части общей мощности). Материал световода прозрачный, и его показатель преломления в этом диапазоне зависит от длины волны по закону $n(\lambda) \approx a/\lambda$, где $a = 1000$ нм. Пройдя по световоду, лучи попадают в приемник. Известно, что лучи, не испытавшие на поверхности световода полного внутреннего отражения, практически полностью покидают его и в приемник не попадают. Какая часть пучка для каждой из длин волн испытывает ПВО при первом падении изнутри на внешнюю поверхность световода? Какова мощность излучения, попадающего в приемник?



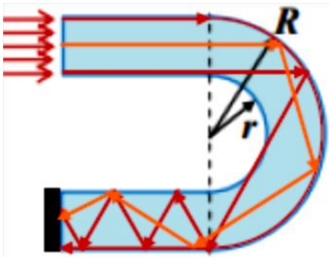
Решение задачи: Рассмотрим луч, падающий на «вход» световода на расстоянии x от его «нижнего» края. Ясно, что угол его падения изнутри на внешнюю поверхность световода определяется из уравнения $\sin(\alpha) = \frac{r+x}{R}$. Для того, чтобы этот луч испытал полное внутреннее отражение, должно выполняться условие



$$\sin(\alpha) \geq \frac{1}{n} \Rightarrow x \geq r\left(\frac{2}{n} - 1\right) = r\left(\frac{2\lambda}{a} - 1\right).$$

Мы обнаружили, что полное внутреннее отражение испытывают лучи, падающие на «вход» световода в интервале значений $r\left(\frac{2\lambda}{a} - 1\right) \leq x \leq r$. Можно заметить, что этот интервал существует для всех значений λ из заданного диапазона, при чем для $\lambda \leq 500$ нм он перекрывает весь диапазон возможных значений x, то есть полное внутреннее отражение испытывают все лучи. Для $\lambda > 500$ нм доля лучей, испытавших такое отражение при первом падении равна $k_1 = \frac{1}{r}\left\{r - r\left(\frac{2\lambda}{a} - 1\right)\right\} = 2\left(1 - \frac{\lambda}{a}\right)$. Минимальная доля отвечает $\lambda = 700$ нм и равна 60 %.

Как видно из построения (см. рисунок), лучи, испытывающие ПВО при первом падении, далее обязательно доходят до поглотителя: даже «крайний» луч, отвечающий x=0, после первого отражения идет по касательной к внутреннему радиусу и падает в точку сопряжения изгиба и плоской части пластины с тем же углом падения в 30°, что и в первый раз..Значит, и в этой точке луч испытает полное внутреннее отражение. Ясно, что при следующих падениях на боковые поверхности плоской части пластины угол падения останется таким же, и этот луч дойдет до поглотителя. Лучи, идущие выше этого, будут иметь еще большие углы падения на внешнюю цилиндрическую и плоские поверхности пластины, поэтому они тоже дойдут до поглотителя. В падающем пучке мощность излучения распределена по спектру равномерно (отношение мощности к ширине спектра $\frac{15\text{ Вт}}{300\text{ нм}} = 0{,}05\frac{\text{Вт}}{\text{нм}}$), а в пучке, дошедшем до поглотителя, для некоторых длин волн она уменьшается за счет того, что не все лучи испытывают ПВО. Как мы поняли, на диапазон $\lambda \leq 500$ нм приходится мощность $P_1 = 0{,}05\frac{\text{Вт}}{\text{нм}} \cdot 100\text{ нм} = 5\text{ Вт}$. В диапазоне $\lambda > 500$ нм мощность, приходящаяся на малый интервал длин волн, убывает линейно от $0{,}05\frac{\text{Вт}}{\text{нм}}$ до $0{,}6 \cdot 0{,}05\frac{\text{Вт}}{\text{нм}} = 0{,}03\frac{\text{Вт}}{\text{нм}}$. Используя среднюю «спектральную плотность», вычислим мощность излучения с $\lambda > 500$ нм, приходящую в поглотитель: $P_2 = 0{,}04\frac{\text{Вт}}{\text{нм}} \cdot 200\text{ нм} = 8\text{ Вт}$. Полная мощность излучения, попадающего в приемник, $P = P_1 + P_2 = 13$ Вт. Расчет также можно провести, построив график распределения мощности по спектру.



ОТВЕТЫ: При первом падении на поверхность световода изнутри доля лучей, испытавших ПВО, равна $k_1 = 2\left(1 - \frac{\lambda}{a}\right)$ при $\lambda > 500$ нм, и равна 1 при $\lambda \leq 500$ нм. Мощность излучения, попадающего в приемник, $P = 13$ Вт.

Критерии проверки задачи:

№	действие	балл
1	Правильно записано условие на показатель преломления для того, чтобы луч испытал ПВО при первом падении	1
2	Из этого условия выведено правильное условие на координату луча с заданной длиной волны (эквивалентное $r\left(\frac{2\lambda}{a}-1\right) \leq x \leq r$)	4
3	Полученное правильное выражение для доли лучей с заданной длиной волны, испытавших ПВО при первом падении.	2
4	Показано (рассуждениями либо построениями хода лучей), что все лучи, испытавшее ПВО при первом падении, доходят до поглотителя.	3
5	Используется корректный метод подсчета суммарной мощности излучения, попадающего в приемник: для диапазона $\lambda \leq 500$ нм и для диапазона $\lambda > 500$ нм.	1+2=3
6	Получен правильный численный ответ $P = 13$ Вт.	2
Всего		**15**