10-11 классы, подготовка к теоретическому туру

олимпиады школьников «Робофест» по физике

Теоретический обзор к занятию «заряды в магнитном поле».

При движении заряженного тела со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле, индукция которого $\vec{B}$ не зависит от времени, необходимо учитывать действующую со стороны поля на заряд силу – ее называют *силой Лоренца*, и она вычисляется по формуле $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$. Здесь использована конструкция, которую математики называют «векторным произведением»: вектор силы Лоренца направлен перпендикулярно векторам скорости и индукции (одно из двух возможных направлений вдоль перпендикуляра определяется по «*правилу левой руки*» или любому эквивалентному алгоритму), а модуль силы Лоренца $|\vec{F}_L| = |q||\vec{v}||\vec{B}|\sin(\alpha)$, где α – угол между $\vec{v}$ и $\vec{B}$.
Важно понимать, что и скорость, и индукция магнитного поля зависят от выбора Системы Отсчета, но при этом описание движения заряженных частиц при учете электромагнитного взаимодействия одинаково во всех инерциальных СО.
У силы Лоренца есть одна очень важная особенность. Поскольку она всегда перпендикулярна скорости, то ее работа при любом перемещении заряда равна нулю. Таким образом, сила Лоренца не может изменить кинетическую энергию частицы – если других сил нет, то, независимо от конфигурации постоянного магнитного поля, скорость движущегося в нем пробного заряда меняется только по направлению, но не по величине. Обратим внимание: в электродинамике «пробный заряд» - это заряженное тело пренебрежимо малых размеров, собственным полем которого можно пренебречь. В том числе мы пренебрегаем полем *излучения* – на самом деле любой ускоренно движущийся заряд испускает *электромагнитные волны*, то есть теряет механическую энергию на это излучение. Только пренебрежение этим эффектом позволяет нам говорить о сохранении механической энергии движущегося с ускорением заряда! Впрочем, для *нерелятивисткиx* (то есть движущихся со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме) зарядов это приближение оправданно.

Начнем с самого простого случая – движения в однородном магнитном поле (индукция не только постоянна, но и одинакова во всей рассматриваемой области пространства). В этом случае следует разделить общее движение частицы на два **независимых** движения: вдоль магнитного поля и «поперек» него. В самом, если частица движется вдоль поля, то сила Лоренца равна нулю, и частица будет двигаться равномерно и прямолинейно. Такое движение называют **продольным дрейфом**. Можно сделать общий вывод: компонента скорости частицы $\vec{v}_{\parallel}$ вдоль магнитного поля не изменяется ни по величине, ни по направлению.

Пример 1: Ион влетел в область, в которой было создано однородное постоянное магнитное под, в точке A, углом 60° к линиям индукции на расстоянии 5 мм от непроводящей поверхности кристалла и врезался в эту поверхность в точке B, лежащей в точности на той же линии индукции, что и точка A, спустя 20 мкс. Найдите величину скорости электрона в точках A и B. Известно, что поверхность кристалла перпендикулярна линиям индукции магнитного поля.

Решение: Сразу отметим, что величина скорости заряженной частицы в магнитном поле не изменяется, поэтому в точках A и B она одинакова. Конечно, частица не движется по прямой, но ее проекция на линию индукции сохраняется и все время равна $v_{\parallel} = v \cdot \cos(60°) = \frac{v}{2}$. Значит, смещение частицы вдоль лини индукции за время полета $d = \frac{v}{2}t \Rightarrow v = \frac{2d}{t} = 500$м/с.

Ответ: $v = \frac{2d}{t} = 500$м/с.

При анализе движения в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, в первую очередь тоже обратим внимание на то, что модуль соответствующей составляющей скорости $\vec{v}_{\perp}$ тоже не изменяется (это естественно, поскольку не изменяется модуль скорости и ее проекция на направление индукции). Из этого утверждения сразу следует еще одно: при движении заряженной частицы в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, не изменяется и модуль ее ускорения $a_{\perp} = \dfrac{|q| v_{\perp} B}{m}$. Итак, ускорение и скорость частицы в этой плоскости все время поворачиваются, оставаясь перпендикулярными (то есть ускорение является центростремительным) и неизменными по величине. Такая картина в точности отвечает равномерному вращению по окружности, радиус которой определяется из уравнения для центростремительной компоненты ускорения: $m\dfrac{v_{\perp}^2}{R} = |q| vB \Rightarrow R = \dfrac{mv_{\perp}}{|q| B}$. Такое движение называют **ларморовским вращением**. Можно определить все его характеристики: радиус мы уже вычислили радиус описываемой частицей окружности (его также часто называют *ларморовским радиусом*), и легко найдем период обращения по ларморовской окружности $T = \dfrac{2\pi R}{v_{\perp}} = \dfrac{2\pi m}{|q| B}$ и угловая скорость – *ларморовскую частоту*, которая равна $\omega = \dfrac{|q| B}{m}$. Обратим внимание, что период и угловая скорость не зависят от скорости частицы – только от ее удельного заряда и величины индукции магнитного поля.

Пример 2: Электрон влетает в магнитное поле с индукцией $B = 2$ мТл со скоростью 440 км/с, двигаясь перпендикулярно линиям индукции. Найдите радиус ларморовской окружности и период вращения.

Решение: Из справочных данных известен удельный заряд электрона: $\dfrac{|e|}{m} \approx 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. В соответствии с полученными формулами $R = \dfrac{mv}{|e| B} \approx 125$ мкм, а $T = \dfrac{2\pi m}{|q| B} \approx 17{,}85$ нс.

Ответ: $R = \dfrac{mv}{|e| B} \approx 125$ мкм, а $T = \dfrac{2\pi m}{|q| B} \approx 17{,}85$ нс.

Если же скорость частицы будет иметь и составляющую, параллельную полю, и составляющую, перпендикулярную полю, то движение будет комбинацией двух разобранных, то есть частица будет двигаться по **винтовой линии**.

Пример 3: Ион из примера 1 обладает удельным зарядом $\dfrac{q}{m} = +5 \cdot 10^{7}$ Кл/кг. Найдите возможные значения индукции магнитного поля.

Решение: Все время перемещения вдоль линии индукции ион совершал вращение в плоскости, перпендикулярной этой линии (и параллельной поверхности кристалла), и все-таки в конце изучаемого промежутка времени вновь вернулся на ту же линию индукции. Это возможно, если, двигаясь в пространстве по винтовой линии, в проекции на плоскость, перпендикулярную полю, он совершил целое число оборотов. Значит, время полета было целым кратным периоду ларморовского вращения: $t = n \cdot T = n \cdot 2\pi \dfrac{m}{qB} \Rightarrow B_n = n \cdot 2\pi \dfrac{m}{qt}$, где $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, минимальная величина индукции, при которой описанное движение иона возможно – это $B_1 = 2\pi \dfrac{m}{qt} \approx 12{,}6$ мТл. Кроме того, ион попадает в нужную точку при величине индукции, кратной этому значению.

Ответ: $B_n = n \cdot 2\pi \dfrac{m}{qt} \approx n \cdot 12{,}6$ мТл, где $n = 1, 2, \ldots$.

Если, помимо магнитного поля, в пространстве, в котором движется заряженная частица, присутствуют и другие силовые поля, движения частицы становятся еще более разнообразны. Если эти силы совершают работу, то скорость частицы изменяется. Рассмотрим случай постоянной дополнительной силы (обычно в ее роли выступает либо сила, действующая на частицу со стороны однородного электрического поля, либо сила тяжести). Здесь тоже удобно с самого начала разделить возможные ситуации на два случая.

Первый – когда эта сила является ***продольной***, то есть направлена вдоль линий индукции магнитного поля. В этом случае дополнительная сила **не влияет** на ларморовское вращение, а сила Лоренца по-прежнему **не влияет** на движение вдоль поля, то есть эти движения остаются **независимыми**. Итак, при рассмотрении движения частицы в магнитном поле постоянного направления при наличии продольной силы другой природы (направление которой всегда параллельно направлению вектора магнитной индукции) нам необходимо отдельно проанализировать движение вдоль магнитного поля и движение в плоскости, перпендикулярной полю. По сути влияние продольной дополнительной силы сводится к тому, что продольный дрейф становится неравномерным.

Пример 4: Небольшим заряженным шариком «выстрелили» со скоростью $v_0 = 40$ м/с под углом 30° к горизонту в области, из которой откачан воздух и создано вертикальное магнитное поле с индукцией $B = 1$Тл. Оказалось, что шарик пролетел по замкнутой траектории без самопересечений и упал точно в точку старта. Найдите длительность полета шарика и модуль его удельного заряда. Ускорение свободного падения считать примерно равным 10 м/с^2.

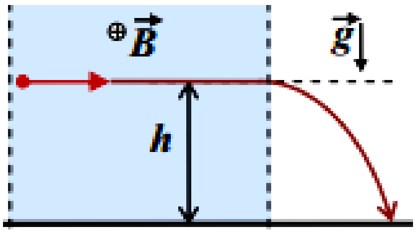
Решение: Уравнение движение шарика вдоль оси z, направленной вертикально вверх, не содержит магнитного поля – по этой оси шарик движется с ускорением свободного падения, и потому движение вдоль вертикали не отличается от «обычного» движения тела, брошенного под углом к горизонту: $z(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}$. Время полета определяется условием $z(t_n) = 0$, то есть, как обычно при броске под углом к горизонту $t_n = \dfrac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \approx 4$ с. В горизонтальной плоскости xy тело движется, «не чувствуя» поля тяжести, и поэтому оно совершает ларморовское вращение с угловой скоростью $\omega = \dfrac{|q|B}{m}$ по окружности радиуса $R = \dfrac{mv_0 \cos(\alpha)}{|q|B}$. Из условия ясно, что за время движения шарик совершил ровно один оборот по ларморовской окружности (он вернулся в исходную точку, и траектория сама себя не пересекала), то есть $\dfrac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} = 2\pi \dfrac{m}{|q|B} \Rightarrow \dfrac{|q|}{m} = \dfrac{\pi g}{v_0 \sin(\alpha) B} \approx 1{,}57$ Кл/кг.

Ответ: $t_n = \dfrac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \approx 4$ с, $\dfrac{|q|}{m} = \dfrac{\pi g}{v_0 \sin(\alpha) B} \approx 1{,}57$ Кл/кг.

Если же сила является поперечной – направлена в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$ (ее в этом случае также часто называют «скрещенной» с магнитным полем), то сила Лоренца действует в той же плоскости, что и дополнительная сила, и движение определяется их совместным действием. Анализ этого случая приводит к обнаружению нового интересного явления,– явления **дрейфа в «скрещенных» полях**. Если на частицу действует сила Лоренца и другая, постоянная по величине и направлению сила $\vec{F}$, перпендикулярная $\vec{B}$, то можно подобрать скорость движения частицы $\vec{v}_D$, при которой сила Лоренца в точности уравновесит $\vec{F}$: $q[\vec{v}_D \times \vec{B}] = -\vec{F}$. Значит, при «запуске» с такой скоростью частица будет двигаться равномерно и прямолинейно – такие движения, как мы поняли, и называют «дрейфом». Ясно, что скорость дрейфа перпендикулярна и $\vec{F}$, и $\vec{B}$, а ее величина $v_D = \dfrac{F}{qB}$.

Пример 5: Небольшим шариком с удельным зарядом $\frac{q}{m} = +10$ Кл/кг «выстрелили» из точки на высоте $h = 2{,}2$ м над горизонтальным участком поверхности Земли в области, из которой откачан воздух и создано горизонтальное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Оказалось, что шарик летел равномерно по прямой линии до тех пор, пока не вылетел за пределы области, в которой создавалось магнитное поле. С какой скоростью шарик упал на землю? Он до самого падения оставался в безвоздушном пространстве. Ускорение свободного падения считать примерно равным 10 м/с^2.

Решение: Из условия ясно, что поначалу движение шарика было дрейфом в скрещенных полях. Это значит, что после выстрела он летел в направлении, перпендикулярном магнитному полю и силе тяжести (то есть горизонтально) со скоростью $v_D = \frac{mg}{qB}$. После вылета в область, где нет магнитного поля, он начнет падать (его скорость начнет расти). Поскольку до начала падения его высота не изменялась, то к моменту падения его кинетическая энергия возрастет на $\Delta E = mgh$.



Значит, скорость падения будет определяться из соотношения $\frac{mv_D^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{mg}{qB}\right)^2 + 2gh$. Таким образом, $v = \sqrt{\left(\frac{mg}{qB}\right)^2 + 2gh} \approx 12$ м/с.

Ответ: $v = \sqrt{\left(\frac{mg}{qB}\right)^2 + 2gh} \approx 12$ м/с.